LÍDIA QUEIROZ*

GEOMETRIA *VERSUS* ATOMISMO: AS POSIÇÕES CRÍTICAS DE BRADWARDINE E WODEHAM

Geometry* versus *atomism: the critical positions of Bradwardine and Wodeham
Abstract
This paper focuses on the use of geometry in combating the emergence of the defense of atomism inside the University of Oxford in the first half of the fourteenth century. Henry of Harclay and Walter Chatton put into question the Aristotelian-Scholastic tradition by exploring the philosophical atomism and these philosophers are on the list of opponents that Bradwardine and Wodeham have in their minds when writting their anti-indivisibilism treatises, namely the *Tractatus de continuo* and the *Tractatus de indivisibilibus* respectively. The arguments of Bradwardine and Wodeham illustrate the controversial discussions about the possibility of an indivisibilist structure of the mathematical and physical continua.
Keywords: atomism; geometry.
Authors: Thomas Bradwardine; Adam Wodeham.

* Investigadora em pós-doutoramento do Instituto de Filosofia da Universidade do Porto e do Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa, com um projecto em torno da epistemologia bachelardiana e a história do atomismo, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia. Email: lqueiroz@letras.up.pt.

Resumo
Este artigo versa o recurso à geometria no combate à emergência da defesa do atomismo no interior da Universidade de Oxford, na primeira metade do século XIV. Henrique de Harclay e Gualter Chatton colocaram em causa a tradição aristotélico-escolástica ao explorarem o atomismo filosófico e estes filósofos figuram na lista dos adversários que Bradwardine e Wodeham têm na sua mira quando redigem os seus tratados anti-indivisibilismo, a saber: o *Tractatus de continuo* e o *Tractatus de indivisibilibus*, respectivamente. Os argumentos de Bradwardine e de Wodeham ilustram as polémicas discussões em torno da possibilidade de uma estrutura indivisibilista dos contínuos matemáticos e físicos.
Palavras-chave: atomismo; geometria.
Autores: Tomás Bradwardine; Adão Wodeham.

Num contexto em que a tese aristotélico-escolástica da impossibilidade da composição dos contínuos por pontos ou indivisíveis dominava, quase sem qualquer voz divergente, o panorama das respostas dadas ao problema da continuidade, vemos irromper no interior da Universidade de Oxford, no início do século XIV, a defesa do atomismo ou indivisibilismo. Henrique de Harclay (in *Questiones*) e Gualter Chatton (in *Reportatio super Sententias*)[78] são os protagonistas da defesa de uma perspectiva contrária à tradição aristotélica, sustentando que o contínuo compõe-se de indivisíveis. A tese aristotélica manteve-se praticamente imperturbada durante a Idade Média, contando ademais com uma atenção significativa por parte dos autores da escolástica que, seguindo na mesma linha de pensamento, avançaram na análise da questão. Somente no período tardo-medieval, alguns autores latinos assumem posições discordantes da concepção clássica vigente anti-indivisibilista. Tal erupção de ideias seria previsível pois fora exactamente nos finais do século XIII que o aristotelismo se estabelecia como «paradigma»[79] no mundo latino

[78] Henrique de Harclay, *Quaestiones*, in: Henry of Harclay, *Ordinary Questions*, vol. 1: *I-XIV*, vol. 2: *XV-XXIX*, ed. M.G. Henninger, transl. R. Edwards – M.G. Henninger, Oxford University Press, New York 2008; Gualter Chatton, *Reportatio super Sententias*, Edition with an Introduction and Notes by J.C. Wey and G.J. Etzkorn, Pontifical Institute of Mediaeval Studies, Toronto 2002.

[79] T. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolutions*, The University of Chicago Press, Chicago (1962) 1996 (3.ª ed.), p. 52: «...research under a paradigm must be a particularly effective way of inducing paradigm change». Acerca da ideia de «paradigma» associada ao «aristotelismo», cfr. C. Leijenhorst, C. Lüthy e H. Thijssen, «The Tradition of Aristotelian Natural Philosophy. Two Theses and Seventeen Answers», *in* C. Leijenhorst, C. Lüthy e J. Thijssen (eds.), *The Dynamics of Aristotelian Natural Philosophy from Antiquity to the Seventeenth Century*, Brill, Leiden-Boston-Köln 2002, pp. 1-29. Nesse artigo, os autores alertam para o facto do termo «aristotelismo» não ter uma «essência» clara (p. 1), aplicando-se o adjectivo «aristotélico» a diferentes casos doutrinais.

académico, com a chegada de textos de Aristóteles traduzidos, do âmbito da filosofia natural, bem como os dos seus comentadores árabes[80]. A filosofia natural do século XIV edifica-se com base nas obras de Aristóteles, dispondo-se da totalidade dos seus *libri naturales* e, de entre estes, conferindo-se uma especial atenção à *Física*[81].

No contexto da controvérsia originada pela emergência da defesa do atomismo na Universidade de Oxford, Bradwardine (in *Tractatus de continuo*) e Wodeham (in *Tractatus de indivisibilibus*)[82] reagem imediata e energicamente à defesa daquela nova perspectiva e colocam Harclay e Chatton na mira do ataque que encetam, no qual o recurso à geometria encontra-se em destaque. As posições de Harclay e de Chatton são interpretadas tanto por Bradwardine como por Wodeham como sendo ambas construídas sobre a noção de indivisível como um ponto matemático. Este atomismo seria portanto de carácter matemático: os *indivisibilia* são encarados como pontos geométricos, isto é, absolutamente inextensos[83].

Assim, «falar da tradição aristotélica de filosofia natural deve significar, antes de tudo, falar de uma tradição de pensamento sobre os fenómenos naturais com referência a, ou na terminologia de, doutrinas expostas nos *libri naturales* de Aristóteles» (p. 4). Um filósofo natural «aristotélico» pouco mais significa do que ter um campo textual comum de referência, pois é inegável o desenvolvimento de vários «aristotelismos» ou correntes de inspiração aristotélica no terreno da filosofia natural (p. 5). Assim, o termo «aristotélico» é legitimamente aplicado dada a presença de um «ar de família» entre um certo número de autores e doutrinas filosóficas, e não porque o «aristotelismo» constitua uma estrutura sistemática doutrinal (p. 5).

[80] «As Aristotle gradually became accepted as the prime authority for the natural sciences – say, late in the thirteenth century», J. North, «Natural Philosophy in Late Medieval Oxford», *in* J. Catto e R. Evans (eds.), *The History of the University of Oxford*, vol. II: Late Medieval Oxford, Clarendon Press, Oxford 1992, p. 67.

[81] «Although all of the Aristotelian books of natural philosophy were taught at Oxford, (...), the greatest emphasis was placed on Aristotle's *Physics* as the philosophical foundation of all academic speculation» (isto é, nas ciências naturais, não em absoluto), J. Weisheipl, «Ockham and the Mertonians», *in* J. Catto (ed.), *The History of the University of Oxford*, vol. I: The Early Oxford Schools, Clarendon Press, Oxford 1984, p. 625.

[82] Tomás Bradwardine, *De continuo*, ed. in: J.E. Murdoch, Geometry and the Continuum in the Fourteenth Century: A Philosophical Analysis of Thomas Bradwardine's Tractatus de Continuo, Ph.D. dissertation, University of Wisconsin, 1957, pp. 338-471; Tomás Bradwardine, *De continuo*, introdução, tradução e notas por Lídia Queiroz, texto latino por J. Murdoch, prefácio J. Meirinhos, (Imago Mundi, 6) Ed. Afrontamento, Porto 2013, pp. 74-256. As citações das passagens do *De continuo* que constam neste artigo terão como base esta última edição – a versão mais actualizada da edição do tratado (*vide* J. Meirinhos, prefácio, op. cit., pp. 8-10). Adão Wodeham, *Tractatus de indivisibilibus*, in R. Wood (ed.), Adam de Wodeham, *Tractatus de indivisibilibus*, A Critical Edition with Introduction, Translation and Textual Notes, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London 1988.

[83] No entanto, refira-se, os indivisíveis de Chatton não são representáveis por pontos uma vez que são como entidades físicas. *Vide* J. Biard e J. Celeyrette (eds.), *De la théologie aux*

Pensa-se que o *De continuo* tenha sido escrito entre 1328 e 1335. Este tratado constitui um sistema demonstrativo que evoca os *Elementos*[84] de Euclides, tanto na estrutura da obra como na abordagem predominantemente matemática com a qual são examinadas as variadas questões. Esta obra é composta por uma série de «Definições» e «Suposições» apresentada no início do tratado, com base na qual todo um conjunto de «Conclusões» decorre. É ao longo das «Conclusões» que o filósofo procura refutar as teses atomísticas, colocando em evidência a impossibilidade destas serem verdadeiras pois colidem com princípios básicos de todos os domínios do conhecimento. De todas as fontes mencionadas por Bradwardine no *Tractatus de continuo*, Euclides (o geómetra mais admirado durante a Idade Média) e Aristóteles são nitidamente as de maior representatividade. Representando «o apogeu da *ratio mathematica* contra o atomismo do século XIV»[85], o tratado *Acerca do contínuo* talvez seja «a mais brilhante»[86] de todas as obras medievais escritas no contexto da polémica em torno da composição atomística do contínuo.

Quanto ao *De indivisibilibus*, pensa-se que tenha sido escrito entre 1324 e 1330. Este tratado é composto por cinco questões (contendo artigos), a saber: na primeira questão, Wodeham considera se as formas ou contínuos são compostos de indivisíveis; na segunda, trata o problema de se saber se entre os contínuos há alguma quantidade extensiva indivisível ou entre formas aumentáveis algum indivisível intensivo; na terceira, examina sete dúvidas acerca da posição divisibilista; na quarta, considera se a infinita divisibilidade de um contínuo pode ser reduzida a acto; na quinta, considera se

mathématiques. L'infini au XIV^e^ siècle, Les Belles Lettres, Paris 2005, p. 31. Acerca do reconhecimento da necessidade de se explorar cada vez mais as particularidades de diferentes posições atomísticas na Idade Média, *vide* C. Grellard e A. Robert (eds.), *Atomism in Late Medieval Philosophy and Theology*, Brill, Leiden 2009.

[84] Para uma introdução geral aos *Elementos* de Euclides, por meio de uma abordagem de tópicos muito diversificados, *vide*, *v. g.*: *Elementos*, Introducción de L. Vega, traducción y notas de M.L.P. Castaños, vol. 1 (Libros I-IV), Editorial Gredos, Madrid 2000, pp. 7-48 e 123-151.

[85] J. Murdoch, «Naissance et développement de l'atomisme au Bas Moyen Âge Latin», *in* G.-H. Allard e J. Ménard (eds.), *Cahiers d'études médiévales II. La science de la nature: théories et pratiques*, 1974, p. 24.

[86] *Ibidem*, p. 18. «Bradwardine's *Tractatus de continuo* is easily the most impressive work on the problem written at any time during the Middle Ages», J. Murdoch e E. Synan, «Two Questions on the Continuum: Walter Chatton (?), O.F.M. and Adam Wodeham, O.F.M.», *Franciscan Studies*, 26 (1966) 221. «Although we have noted that many other treatises on continuity were written in the fourteenth and fifteenth centuries, none of these, to my knowledge, developed the geometrical position and reasoning of Bradwardine to a more, or equally, refined stage», J. Murdoch, *Geometry and the Continuum in the Fourteenth Century: A Philosophical Analysis of Thomas Bradwardine's Tractatus de Continuo*, op. cit., p. 325.

existem mais partes, da mesma proporção, num contínuo maior do que num mais pequeno. Nas questões Wodeham apresenta múltiplos raciocínios dos seus adversários indivisibilistas e refuta-os com base em argumentos usados por divisibilistas, acrescentando os dele próprio. Nesta obra, os argumentos de Harclay e de Chatton são considerados em detalhe[87]; aliás, o tratado *Acerca dos indivisíveis* constitui uma fonte histórica muita rica.

No tratado *Acerca do contínuo*, Tomás Bradwardine denuncia os absurdos engendrados pela defesa da *compositio continui ex indivisibilibus*. Bradwardine define o «indivisível» como «o que nunca pode ser dividido» (Definição 7), abarcando assim um amplo espectro de indivisíveis. Com efeito, a história da filosofia natural que o filósofo herda retratara já dois tipos de indivisíveis: os extensos (corpóreos) e os inextensos (considerados como pontos geométricos)[88]. Assim, quando Bradwardine avançar na sua crítica ao atomismo, estará a abarcar todo o leque de indivisíveis ideados até então, pois todos eles têm em comum o facto de, tendo ou não partes, serem indivisíveis. Os átomos democritianos eram corpos indivisíveis e para alguns autores medievais os átomos são como pontos geométricos.

A questão dos indivisíveis resulta da tentativa de compreensão do problema da continuidade. Trata-se de se saber se os elementos últimos de uma grandeza são eles mesmos extensos ainda ou como pontos geométricos. Partes e pontos podem estar *contidos no* contínuo, mas será que ambos fazem parte da *composição* de um contínuo? Note-se que existe uma diferença entre «estar contido em» e «compor» algo (ou seja, entrar na composição de alguma coisa). A ser possível que os pontos, sem qualquer dimensão, fossem os componentes dos contínuos ter-se-ia de explicar «como é que a extensão, isto é, um *contínuo*, pode ser produzida a partir de partes inextensas»[89]. No fundo, este é o desafio teórico a que os filósofos atomistas do século XIV não puderam escapar, ao defenderem que um contínuo compõe-se de indivisíveis inextensos, porque um contínuo assume a propriedade da extensão pela presença dos seus elementos interconectados. Se os filósofos atomistas

[87] Acerca da crítica de Wodeham a Harclay e Chatton, *vide*: E. Sylla, «God, Indivisibles, and Logic in the Later Middle Ages: Adam Wodeham's Response to Henry of Harclay», *Medieval Philosophy and Theology*, 7 (1998) 69-87; J. Murdoch e E. Synan, «Two Questions on the Continuum: Walter Chatton (?), O.F.M. and Adam Wodeham, O.F.M.», op. cit., pp. 212-288.

[88] Estas duas grandes linhas de concepção dos átomos expressas *in* Tomás Bradwardine, *De continuo*, op. cit., *Conclusio* 31, pp. 129 e 131.

[89] Aristóteles, *Metafísica*, XII, 10, 1075b29. A extensão em comprimento, largura e altura é a grandeza. Uma dada extensão pode ser decomposta em partes menores. Uma grandeza é uma quantidade contínua, mensurável e os pontos matemáticos não têm dimensões.

medievais se serviam de uma concepção dos indivisíveis como pontos matemáticos, teriam de esclarecer então como é que por meio destes se forma uma grandeza (ou, por outras palavras, encontrar uma saída para a ideia expressa pela seguinte expressão medieval: *unum indivisibile additum alteri non facit maius*). Conforme refere Wodeham no *De indivisibilibus*, tal adição não causaria «um aumento em tamanho»[90] ou quantidade (nem que essa operação se realizasse infinitamente), não resultaria em extensão. Dado que um ponto matemático não tem dimensões, ele «não pode causar nenhum aumento dimensional»[91]. O ponto é o indivisível espacial. Um indivisível, se é como um ponto matemático, corresponde a uma grandeza zero: designando o término de uma dada quantidade, já nem se trata de uma quantidade.

Na Idade Média, a partir da tradução da *Física*, a questão do *continuum* era analisada à luz da filosofia de Aristóteles. Para o Filósofo, o contínuo é, antes de mais, uma quantidade. E, por definição, uma quantidade una, embora composta de partes sem fim: trata-se de uma quantidade cujas partes «unem-se num limite comum»[92], sendo estas divisíveis em partes infinitamente divisíveis[93]. Relativamente a esta característica definitória do contínuo, o de ser uno, refira-se que, para Aristóteles, um contínuo é composto de partes cujos limites são partilhados (daí que não haja fronteiras) mas que, não obstante, podem ser destacadas do todo em causa[94]. E se a extensão fosse produzida por meio do contacto entre pontos matemáticos, indivisíveis inextensos, então haveria que esclarecer quais são as condições em que tal contacto pode dar-se.

---

[90] Adão Wodeham, *Tractatus de indivisibilibus*, op. cit., Quaestio 1, Articulus 1, 5, p. 34: «quia si continuum componeretur ex indivisibilibus, apparet quod indivisibile additum indivisibili faceret maius».

[91] Adão Wodeham, *Tractatus de indivisibilibus*, op. cit., Quaestio 1, Articulus 1, 7, p. 36: «Et quia punctus est indivisibilis in omni parte, ideo non facit aliquod maius habens partes.» (Comentário de Averróis à *Física* de Aristóteles).

[92] *Vide* Aristóteles, *Categorias*, 6, 5a1-15.

[93] Aristóteles, *Física*, VI, 1: «...nós vimos que nada contínuo era divisível em partes sem partes» (231b11); «todo o contínuo é divisível em divisíveis *ad infinitum*» (231b15).

[94] Note-se todavia que, para Aristóteles, as partes desse todo (e os limites comuns que partilham) não têm uma existência actual até que uma divisão seja realizada, pois antes dessa operação as partes de um contínuo encontravam-se nele apenas potencialmente (em acto, não existiam as chamadas «fronteiras comuns» das partes – estas só se desvelam se a análise do pensamento as fizer sair da sua potencialidade). Cfr. Aristóteles, *Física*, VIII, 8, 262a21-22. Tais partes existiam nos contínuos, *in potentia*, não são «construídas» pelo sujeito cognoscente. *Vide* J. Murdoch, «William of Ockham and the Logic of Infinity and Continuity», *in* N. Kretzmann (ed.), *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, Cornell University Press, Ithaca-London 1982, p. 202.

Aristóteles, no sexto livro da *Física*, apresentou o espectro das possibilidades de contacto entre os indivisíveis pretensamente constituintes de um qualquer contínuo e mostrou, pelo método de *reductio ad absurdum*, que nunca aqueles poderiam estar em contacto; logo, o que subjaz à continuidade de uma coisa são componentes eles mesmos contínuos. Aristóteles inicia a fundamentação desta conclusão do seguinte modo: «se os pontos fizessem um contínuo, eles teriam de ser ou contínuos ou contíguos»[95]. Ora,

(1) Contínuos não são porque nem sequer têm extremidades. Só pode ter extremidades o que possui partes e um ponto geométrico não as possui. O indivisível é o que não pode ser dividido por não possuir outra parte que não seja já a última (a única). O contínuo é aquilo cujas partes extremas são um só; portanto, os indivisíveis não podem ser contínuos pois nem sequer têm limites que possam ser partilhados com os outros indivisíveis, tornando-se limites comuns[96].

(2) Nem entre eles existe contiguidade. Porque para tal eles deveriam tocar-se, estar juntos. Mas o contacto só poderia dar-se entre: (1) *o todo* (de um ponto) *com o todo* (do outro), ou (2) *a parte* (de um) *com a parte* (do outro), ou (3) *a parte* (de um) *com o todo* (do outro). Constata-se que (2) e (3) são impossíveis porque os pontos não têm partes[97], e que (1) também o é, pois se o todo toca o todo os pontos não serão contínuos já que a continuidade requer que haja partes separadas no espaço (e se os indivisíveis estivessem em contacto o todo com o todo, as partes do contínuo seriam indistinguíveis). Logo, os contínuos não podem ser compostos de indivisíveis[98]. Em suma: os indivisíveis não podem estabelecer um contacto como as partes de um contínuo o fazem, pois não apresentam os requisitos necessários, na perspectiva aristotélica, para que tal contacto pudesse realizar-se. Por conseguinte, não se pode sustentar que os indivisíveis possam constituir um contínuo pelo alegado contacto entre si. O argumento aristotélico relativo ao

[95] Aristóteles, *Física*, VI, 1, 231a29.

[96] *Vide* Aristóteles, *Física*, VI, 1, 231a21-22 e 231a26-29. A tese da *compositio ex indivisibilibus* implicaria então uma contradição formal entre os termos «indivisível» e «contínuo» (*contradictio in terminis*).

[97] Note-se que o sucesso deste argumento circunscreve-se ao domínio dos indivisíveis inextensos.

[98] Cfr. Aristóteles, *Física*, VI, 1, 231a21-231b6. Na *Física*, o Estagirita mostra que é impossível que qualquer contínuo – espacial, temporal ou de movimento – seja composto de indivisíveis. Para um ensaio polemizador acerca da posição aristotélica, *vide* D. Bostock, «Aristotle on Continuity in *Physics* VI», *in* L. Judson (ed.), *Aristotle's Physics: a Collection of Essays*, Clarendon Press, Oxford 1991, pp. 179-212.

contacto entre pontos[99] foi incorporado no tratado de Wodeham, mas não aparece no de Bradwardine[100].

Wodeham apresenta e comenta a demonstração aristotélica exposta supra com base em argumentos de Aristóteles e do Comentador:

> (...) Aristóteles prova a falsidade do consequente mais ou menos no início da *Física* VI assim: Se um indivisível adicionado a um indivisível causasse um aumento em quantidade, então ele teria de tocar esse próprio indivisível. O consequente é falso, dado que um indivisível não pode ser contínuo com outro indivisível. Nem podem estar os indivisíveis consecutivamente situados, de acordo com a definição de coisas assim situadas. Porque os contínuos são entidades cujas extremidades são uma só, e as entidades contíguas são aquelas cujas extremidades estão juntas. Mas um indivisível não tem uma extremidade, por isso etc. No entanto, uma vez que um falsígrafo pode negar estas descrições, Aristóteles coloca a questão de outra maneira: Se um indivisível tocasse um indivisível compondo um contínuo – isto é, se ele fosse imediatamente aplicado a ele num contínuo de tal modo que uma verdadeira unidade resultaria da combinação destes indivisíveis – então ou o todo tocaria o todo, ou uma parte tocaria uma parte, ou uma parte tocaria o todo. Nem a segunda nem a terceira alternativa é possível, dado que então o indivisível não seria indivisível, porque teria partes. Se um todo tocasse um todo, ele não causaria um aumento em extensão. O Comentador confirma isto na *Física* VI, comentário 2: Porque de acordo com Aristóteles quando alguma coisa toca algo como um todo, dá-se sobreposição, e da sobreposição não resulta nenhum aumento em tamanho (...)[101].

---

[99] Um argumento mais de carácter «intuitivo» do que «matemático» (*in* J. North, «Astronomy and Mathematics», *in* J. Catto e R. Evans (eds.), *The History of the University of Oxford*, vol. II: Late Medieval Oxford, Clarendon Press, Oxford 1992, p. 149).

[100] O famoso argumento de Aristóteles da impossibilidade de um meio de contacto entre os indivisíveis, *por carecerem de partes*, não é mencionado e trabalhado no *De continuo*. Não tendo Bradwardine valorizado esse aspecto da natureza dos indivisíveis, isto é, o da carência de partes (deixando em aberto a possibilidade de as terem, pela maneira como define o «indivisível» no início do tratado), o seu sistema demonstrativo acabará por se desenvolver mantendo afastado esse argumento.

[101] Adão Wodeham, *Tractatus de indivisibilibus*, op. cit., Quaestio 1, Articulus 1, 6-7, pp. 34-36: «Falsitatem consequentis probat Aristoteles, VI *Physicorum* propre principium sic: Quod si indivisibile additum indivisibili faceret maius, oporteret quod tangeret ipsum. Consequens est falsum, quia indivisibile non potest continuari alteri indivisibili nec consequenter se habere per definitionem se habentium taliter. Nam continua sunt quorum ultima sunt unum, et contigua sunt quorum ultima sunt simul. Indivisibile autem non habet ultimum; igitur etc. Quia tamen protervus negaret tales descriptiones, ideo aliter ait Aristoteles sic: Si indivisibile tangeret indivisibile componendo continuum – id est sibi immediate applicaretur in continuo ita quod ex ipsis resultaret vere unum –, aut ergo totum tangeret totum aut pars partem aut pars totum.

Quem ousasse tentar estabelecer no panorama universitário o atomismo, teria de ser capaz não só de derrubar o sistema argumentativo aristotélico contra a composição indivisibilista dos contínuos mas também os novos argumentos de carácter matemático que, principalmente a partir do final do século XIII, se acrescentaram àqueles da doutrina aristotélica[102]. Vencê-los seria uma tarefa muito desafiante porque esta diversidade e padrão de argumentação conquistaram grande fama, ainda mais pelo facto de estarem associados a algumas figuras de prestígio da história da filosofia. Respondendo então a esta exigência de refutação, os defensores do atomismo nos finais da Idade Média teriam de explicar que tipo de ligação se estabelece entre os indivisíveis para que se perceba como é que se formariam as grandezas.

Autores atomistas do período tardo-medieval descobrem uma maneira de explicar o contacto possível entre os pontos. Eles idearam uma nova explicação arquitectada com base numa fonte de inspiração peculiar, a saber: o axioma da congruência de Euclides. Este axioma foi aplicado nas provas dos teoremas que constituem as Proposições 4 e 8 do Livro I dos *Elementos*, e ainda na Proposição 24 do Livro III[103]. A demonstração realiza-se pela manipulação dos objectos geométricos praticando a sua sobreposição (*ex superpositione*). Nos *Elementos* de Euclides procede-se à sobreposição de figuras geométricas distintas pela deslocação de uma (assumindo-se que o movimento não a deforma) e a sua colocação sobre a outra. E a sobreposição de duas coisas ocorre sempre que uma se coloca imediatamente junta da outra, sem que haja entidade alguma ou qualquer espaço entre elas que as separe. A ideia de sobreposição é apresentada por Bradwardine no início do seu tratado, na décima quinta definição[104]. As figuras que coincidam são iguais entre si[105].

Non secundum nec tertium, quia tunc non esset indivisibile, quia haberet partem et partem. Si secundum totum, ergo non facit maius extensive. Et confirmatur per Commentatorem ibidem, commento secundo: Quia secundum ipsum cum aliquid tangit aliquid secundum totum est superpositio, et ex superpositione non provenit magnitudo maior quam prius».

[102] Cfr. J. Murdoch, «Infinity and Continuity», *in* N. Kretzmann, A. Kenny e J. Pinborg (eds.), *The Cambridge History of Later Medieval Philosophy. From the Rediscovery of Aristotle to the Disintegration of Scholasticism 1100-1600*, Cambridge University Press, Cambridge 1982, p. 579. *Vide*, *v. g.*, J.D. Escoto, *Quaestiones in librum II Sententiarum* [in *Opera omnia*, vol. 1, Georg Olms Hildesheim, Darmstadt 1968], Libri II, Distinctio II, Quaestio 9, Scholium: «Probat per duas geometricas demonstrationes continuum non componi ex indivisibilibus (de quo agit 6. Physic.)».

[103] Cfr. os chamados «teoremas da congruência» em Euclides.

[104] Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Definitio 15, pp. 75 e 77: Ser sobreposta uma linha a outra linha, parcial ou totalmente, é a própria linha a aderir à outra em absoluto, sem um meio [entre esta e a outra linha], segundo o comprimento do todo ou da parte.

[105] Cfr. Euclides, *Elementos*, Livro I, Noção Comum 7.

Dada a atribulada história das versões, edições e comentários a que os *Elementos* de Euclides se sujeitaram[106], este axioma encontra-se numerado diferentemente. Na edição crítica de Heiberg, ele corresponde ao axioma 7 que, simplificando, constitui o quarto axioma de Euclides porque outros foram suprimidos. Na versão de Campano corresponde ao axioma 8 e na *Geometria speculativa* de Bradwardine, por exemplo, ele é apresentado em nono lugar. Este é o axioma da congruência de Euclides, na versão de Adelardo de Bath – Campano de Novara: «Se alguma coisa é sobreposta a outra e nenhuma excede a outra, então elas serão iguais»[107]. Assim, figuras geométricas iguais são aquelas em que, aplicadas uma à outra por meio da sobreposição, se verifica imediatamente a evidência da sua igualdade, pois nenhuma excede a outra, revelando antes uma perfeita coincidência de medidas, coincidindo nos seus limites.

Ora, aquilo que os atomistas medievais fazem é apoderarem-se do axioma da congruência convertendo-o na solução que as concepções filosóficas indivisibilistas necessitavam para que não fossem acusadas de inconsistência: estes autores descobrem no contacto matemático que se observa nas figuras geométricas colocadas umas sobre as outras (a *superpositio*) o *contacto* das linhas e dos pontos que nelas existem[108]. O que os filósofos atomistas medievais defendem é que se a geometria euclídea permite a sobreposição de linhas, superfícies e corpos, então os pontos que estão contidos numa linha ficam também sobrepostos aos pontos contidos na outra linha. E, sendo assim, estão em contacto. Portanto, ao contrário do que Aristóteles mostrara, é possível o contacto entre pontos. Pois se, em circunstâncias como esta, admite-se que os pontos contidos nas linhas da superfície de um sólido estão em contacto com os pontos da outra superfície, existirá verdadeiramente uma razão que impeça que se defenda que os pontos contidos numa só grandeza, ou os indivisíveis, possam manter um contacto entre si?

No fundo, a crença dos partidários de teses atomísticas é que os átomos assim sobrepostos estão em contacto e permanecem distintos. As dificuldades teóricas não se dissipariam, porém, inteiramente com o recurso ao axioma

---

[106] Cfr. J. Murdoch, «Euclid: Transmission of the Elements», *in* C. Gillispie (ed.), *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 4, Charles Scribner's Sons, New York 1971, p. 437.

[107] «Si aliqua res superponatur alteri appliceturque ei nec excedat altera alteram, ille sibi invicem equales erunt».

[108] A respeito das diferenças de posição (Harclay e Chatton) quanto à *superpositio*, *vide* J. Murdoch, «Naissance et développement de l'atomisme au Bas Moyen Âge Latin», op. cit., p. 18, n. 20. *Vide idem*, «Superposition, Congruence and Continuity in the Middle Ages», in *Mélanges Alexandre Koyré*, vol. 1, Hermann, Paris 1964, pp. 416-441.

da congruência. Discorrer acerca de indivisíveis em contacto uns com os outros como pontos matemáticos comportou a grande dificuldade de se ter de falar de entidades matemáticas como se de físicas se tratasse. Na crítica à posição aristotélica acerca do indivisibilismo, os autores atomistas medievais deixam entrever nas suas concepções uma imagem fisicalista dos pontos matemáticos[109]. A estes autores, no fundo, era exigido que fossem capazes de adaptar as suas concepções respeitantes a problemas da filosofia natural à linguagem matemática que supostamente lhes trazia a solução para os seus fins doutrinais[110].

À luz da definição do Estagirita, a sobreposição de duas partes não origina a formação de uma grandeza pois as partes mantêm-se distintas uma da outra, em acto, figurando como duas quantidades juntas ou contíguas (e não uma só quantidade). Segundo distinções expressas na *Física*, é contíguo aquilo que, estando em sucessão, está *também* em contacto[111]. O *contínuo* é, então, uma espécie do género do *contíguo*[112], porque nem tudo o que é contíguo é contínuo[113]. Os contínuos são quantidades nas quais os limites das partes não só se tocam como se tornam um e o mesmo, dando-se num mesmo lugar esse contacto entre os limites juntos[114].

Bradwardine assentirá a que a *sobreposição* se assuma como o meio de contacto entre os indivisíveis, mas colocará em causa que por meio dela se forme um contínuo, isto é, pela existência de indivisíveis imediatos. Embora Bradwardine seja um simpatizante da filosofia aristotélica, ele apresentou

---

[109] *Vide* J. Murdoch, «Henry of Harclay and the Infinite», *in* A. Maierù e A. Bagliani (eds.), *Studi sul XIV secolo in memoria di Anneliese Maier*, Edizioni di Storia e Letteratura, Roma 1981, p. 244.

[110] J. Murdoch, «Naissance et développement de l'atomisme au Bas Moyen Âge Latin», op. cit., p. 17: «Bref, le problème était que l'atome du quatorzième siècle étant un point sans extension, il était extrêmement difficile, sinon impossible, de construire aucune conception sensible du contact entre deux points mathématiques. D'un côté, tant qu'à additionner des points, autant valait ne rien additionner du tout; de l'autre, parler de leur contact, c'était parler des éléments mathématiques en termes physiques».

[111] *In* Aristóteles, *Física*, V, 3, 227a6-7.

[112] *In* Aristóteles, *Metafísica*, XI, 12, 1069a5.

[113] Aristóteles, *Metafísica*, XI, 12, 1069a1-11: «Aquilo que, sendo sucessivo, toca, é *contíguo*. (...) o sucessivo não toca necessariamente, mas aquilo que toca é sucessivo. E se uma coisa é contínua, ela toca, mas se ela toca, ela não é necessariamente contínua».

[114] Acerca da «singularidade do lugar das extremidades em contacto», Murdoch menciona uma fragilidade do pensamento de Aristóteles que Bradwardine, por ter seguido uma outra via, conseguiu evitar. *Vide* J. Murdoch, *Geometry and the Continuum in the Fourteenth Century: A Philosophical Analysis of Thomas Bradwardine's Tractatus de Continuo*, op. cit., pp. 80-81.

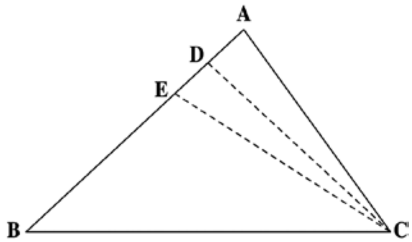
uma definição de contínuo[115] que dá azo a uma maior amplitude de modos de união das partes, abrindo, assim, o lugar à intromissão de elementos alheios e até contrários à física aristotélica. Com efeito, não exigindo a união das partes numa só quantidade *pelos seus extremos*, os defensores do indivisibilismo podem encontrar nessa definição um terreno mais fácil para avançarem com as suas concepções, declarando então que a união das partes de uma grandeza dá-se pela sobreposição, por exemplo. E assim ofereceriam uma resposta à exigência de um meio de contacto entre as partes (indivisíveis). Porém, as tentativas teóricas de carácter indivisibilista foram seriamente atacadas por Bradwardine e desmontadas nos seus inúmeros erros, embora no início do tratado o autor esteja realmente a presentear o adversário com uma definição de contínuo que proporciona uma maior abertura. Com o desenrolar da argumentação do tratado, constatámos que tal espírito de abertura não resulta em mais do que lhes conceder, inicialmente apenas, o «benefício da dúvida»[116]. Sendo o objectivo de Bradwardine o de dirigir uma refutação definitiva a todas as doutrinas indivisibilistas, o autor apresentou uma definição de contínuo que não tinha por que suscitar qualquer reparo ou voz discordante, por parte de um autor defensor do indivisibilismo. Sendo pois pacífica, seria um bom ponto de partida para o seu sistema, dado o universal assentimento que poderia reunir por parte de todos.

Uma das hipóteses exploradas por Bradwardine é então a de que as coisas contínuas se componham de *indivisíveis imediatamente juntos* (ou seja, contíguos – não existindo nada entre quaisquer dois indivisíveis que os fizesse distar um do outro, mantendo portanto um contacto entre si). Ele começa por conceder aos seus adversários o benefício da dúvida de que assim poderá ser, consentindo no que Aristóteles não permitiu – o contacto entre os indivisíveis. Mas depois a sua crítica não se faz esperar, fazendo derivar dessa hipótese inúmeros absurdos, culminando nesta Conclusão:

> 41. Se assim for, não pode existir nenhum triângulo, nem círculo nem, de maneira nenhuma, qualquer ângulo, e perdem-se cinco sólidos célebres e todas

[115] Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Definitio 1, p. 75: O contínuo é uma quantidade cujas partes estão mutuamente unidas.

[116] «Bradwardine has not only refrained from giving the 'alternative' definition of a continuum as that divisible into infinitely divisible parts, but has also refrained from mentioning 'boundaries' in his assertion of the connection of the parts of the continuum. He gives, as it were, the benefit of the doubt to his opponents before proceeding to his refutation of them», J. Murdoch, *Geometry and the Continuum in the Fourteenth Century: A Philosophical Analysis of Thomas Bradwardine's Tractatus de Continuo*, op. cit., p. 90.



as figuras geométricas, não sem uma grande parte da geometria e de toda a matemática com injúria.

A primeira parte é evidente visto que, segundo a conclusão precedente[117], nenhum ângulo é agudo e, pela Proposição 32 do Livro I de Euclides[118], nenhum triângulo tem 3 ângulos rectos. Portanto, não existe o triângulo. Relativamente a esta mesma parte: seja *ABC* um triângulo, e a partir de *D* imediato a *A* trace-se uma recta *DC*. E segue-se o oposto da Conclusão 9[119]. E a partir de *E* imediato a *D* trace--se *EC*, a qual, pela Conclusão 7[120], é paralela a *AC* e encontra-se com aquela no ponto *C*. Portanto, as linhas paralelas encontram-se. E, pelo mesmo raciocínio, a segunda parte é evidente.

E a terceira parte é evidente assim: se existisse algum ângulo, ele poderia ser subentendido por uma base e um triângulo ser feito também, o que está contra a primeira parte desta conclusão.

Quanto à quarta parte, deve saber-se que para os geómetras existem cinco sólidos célebres com superfícies laterais – a saber[121], a pirâmide, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro –, os quais têm todos superfícies triangulares[122].

---

[117] Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Conclusio 40, p. 141: Se assim for, o ângulo recto é o mais pequeno dos ângulos, nenhum ângulo é agudo, e todos os ângulos obtusos são iguais entre si, e nem, de forma alguma, se encontra um ângulo obtuso.

[118] Campano de Novara, I, 32: «Em todo o triângulo, se se prolonga um dos lados, o ângulo externo é igual aos dois ângulos internos e opostos, e os três ângulos internos do triângulo são iguais a dois rectos», in *Campanus of Novara and Euclid's Elements*, ed. by H. Busard, Steiner, Stuttgart 2005.

[119] Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Conclusio 9, p. 97: Não acontece que uma linha recta seja sobreposta a outra recta, segundo o todo ou uma parte grande, e tenha algum ponto de intersecção comum com essa.

[120] Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Conclusio 7, p. 97: Se entre duas linhas uma [linha] medeia – ou mais, mas em número finito – aquelas são paralelas.

[121] Os sólidos regulares são só cinco (o seu estudo consta do Livro XIII dos *Elementos* de Euclides) e são as chamadas figuras cósmicas de que Platão fala no *Timeu*.

[122] À primeira vista, esta afirmação exibe um absurdo em termos matemáticos. Conforme se lê numa passagem da *Geometria speculativa* de Bradwardine (ed. *in* G. Molland, *Thomas Bradwardine, Geometria Speculativa.* Latin Text and English Translation with an Introduction and a Commentary, Steiner, Stuttgart 1989), somente o tetraedro, o octaedro e o icosaedro ficam abrangidos por esta conclusão: «*Ex triangularibus superficiebus tria tantum corpora regularia constituere possibile est*» (Tract. IV, cap. 4, concl. 4, p. 130). A única forma de se retirar daquela passagem do *De continuo* («*que omnia superficies [tri]angulares habent*») um sentido válido é encarando as faces dos cinco poliedros regulares como sendo decomponíveis em triângulos. O triângulo é a mais simples das superfícies planas.

E se não existir, de maneira nenhuma, qualquer ângulo, esses [sólidos] não podem existir.

O resto é evidente pelo mesmo raciocínio[123].

A geometria também alimenta a controvérsia em torno do atomismo no tratado de Wodeham. Um argumento apontado pelos filósofos críticos do indivisibilismo era mostrar que uma concepção indivisibilista dos contínuos implicaria que a diagonal de um quadrado seria igual ao seu lado, dado que o número de indivisíveis na diagonal é igual ao número de indivisíveis do lado. Trata-se de um argumento estritamente geométrico que tanto Bradwardine como Wodeham incluem nos seus tratados. Bradwardine fá-lo na Conclusão 87, assim:

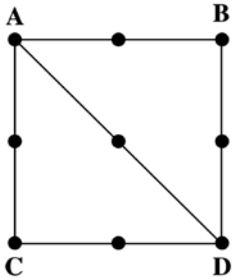
87. Se assim for, toda a diagonal de um quadrado é igual ao seu lado.

Esta é evidente porque dois lados, com todas as linhas rectas paralelas incluídas, são iguais a todos os pontos juntos em algum lado que corta ortogonalmente, e os mesmos são iguais a todos os pontos da diagonal, etc., como foi mostrado na prova da Conclusão 74[124].

[123] Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Conclusio 41, pp. 140 e 142: 41. «Si sic, nullum triangulum nec circulum nec omnino angulum esse posse, et quinque famosa corpora et omnia geometricalia, non absque grandi geometrie et mathematice totius iniuria, deperire. Prima pars patet, quia secundum proximam nullus sit angulus acutus, et per 32am primi Euclidis nullus triangulus habet 3 angulos rectos, igitur nullus est triangulus. Ad idem, sit ABC unus triangulus, et a D immediato A ducatur DC recta, et sequitur oppositum conclusionis 9e. Et ab E immediato D ducatur EC, que per 7am conclusionem equedistat AC et concurrit cum illa in C; igitur linee equedistantes concurrunt. Et per idem patet secunda. Tertia vero patet sic: Si aliquis esset angulus, posset sibi basis subtendi et etiam fieri triangulus, quod est contra primam partem huius. Pro quarta parte sciendum, quod apud geometros sunt quinque famosa corpora laterata – scilicet pyramidus, cubus, octocedron, duocedron, ytocedron – que omnia superficies [tri]angulares habent; et si angulus non sit omnino, non ista possunt esse. Aliud patet per idem». O suporte diagramático que ilustra as provas geométricas que constam neste artigo foi concebido por John Murdoch (acompanham o texto da sua edição crítica do *De continuo*, 1957).

[124] Cfr. Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Conclusio 74, p. 179: «Se assim for, todas as periferias dos círculos, e todos os círculos, são iguais. Se não, descreva-se em torno do centro *A* uma circunferência maior *BCD* e uma menor *EFG*. Então, os pontos de *BCD* são iguais [em número] a todos os raios de *BCD* e os pontos de *EFG* semelhantemente, porque a qualquer raio numa e outra circunferência corresponde apenas um ponto. E quaisquer coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si, portanto, pela Conclusão 2, *BCD* e *EFG* são iguais. E este é o argumento de Algazel. Mas Gualter [Chatton] responde dizendo que esses raios encontram-se depois de terem saído de *BCD* e antes de entrar em *EFG*. E assim, *EFG* tem menos raios do que *BCD*, pelo que a prova fracassa, como o próprio o diz. Mas aquilo não permite o corolário da Conclusão 15. A segunda parte desta conclusão segue-se desta primeira».

De novo, aqui responde Gualter [Chatton] dizendo que tais linhas oblíquas cortam a diagonal em mais do que um ponto, e assim os pontos da diagonal são mais do que aquelas linhas e, semelhantemente, mais do que os pontos do lado. Mas aquilo não permite a Conclusão 14[125].



Relativamente ao mesmo, assim: haja um quadrado *ABCD*, cujo lado tenha três pontos; então, todo o quadrado tem 9 pontos, dos quais 8 estão nos lados, como é evidente para quem calcula. Logo, existe apenas um abaixo dos lados do quadrado pelo qual, se se traça *AD*, a diagonal terá apenas 3 pontos. No entanto, se se diz que a diagonal *AD* terá mais do que um ponto no lado *AB*, isto é falso, porque, pela mesma razão, terá assim no lado *AC* e naquele ângulo, e acerca de *BD* e de *CD* semelhantemente; e então teria latitude e haveria uma superfície. E isto, de novo, está contra a Conclusão 14[126], se *AD*, a partir da direcção de *D*, mais longe se prolonga continuamente e em linha recta. Portanto, *AD* é igual a *AC*, e, pela mesma razão, é [igual] em todos os outros [casos ou lados].

Em relação ao primeiro argumento, Henrique [de Harclay] responde de outro modo dizendo que: porque duas linhas sobrepostas paralelas aos lados do quadrado cortam obliquamente a diagonal, então, entre elas medeia obliquamente algum ponto da diagonal, e talvez medeiem mais pontos. Mas, por causa da Conclusão 8[127], aquilo não pode manter-se[128].

---

[125] Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Conclusio 14, p. 105: «Qualquer recta que corta uma recta, corta-a em algum ponto seu, e em não mais do que um».

[126] *Vide supra* nota 48.

[127] Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Conclusio 8, p. 97: «Entre rectas sobrepostas não medeiam outros pontos».

[128] Tomás Bradwardine, *Tractatus de continuo*, op. cit., Conclusio 87, pp. 188 e 190: «Si sic, omnis quadrati dyameter suo lateri est equalis. Hec patet quia due coste cum omnibus lineis rectis equedistantibus inclusis sunt equales omnibus punctis coniunctis in aliquo latere quod secat orthogonaliter, et eedem sunt equales omnibus punctis dyametri et cetera, ut in probatione 74e est ostensum. Item hic respondet Waltherus dicendo, quod tales linee oblique secant dyametrum in pluribus uno puncto, et sic puncta dyametri sunt plura illis lineis et similiter punctis coste. Sed illud 14a non permittit. Ad idem sic: Sit ABCD quadratum, cuius latus habeat 3a puncta; tunc totum quadratum habet novem puncta, quorum 8 sunt in lateribus, ut patet calculanti; igitur tantum est unum infra latera quadrati per quod, si ducatur AD, dyameter habebit tantum 3a puncta. Si autem dicatur AD dyameter habebit plura puncta quam unum in AB latere, hoc falsum est, quia eadem ratione habebit sic in AC latere et in illo angulo, <et> de BD et CD similiter; et tunc haberet latitudinem et esset superficies. Et hoc rursus est contra conclusionem 14am, si AD ex parte D ulterius protrahatur in continuum et directum. Est igitur AD equalis AC, et eadem ratio est in omnibus aliis. Aliter respondet Henricus dicendo ad primum argumentum, quod quia due linee superposite equedistantes lateribus quadrati secant oblique dyametrum, igitur inter eas

Quanto a Wodeham, apresenta o problema assim (na questão 1, artigo 1, nono argumento):

> Se uma linha fosse composta de pontos, a diagonal de um quadrado seria igual ao lado, o que é falso e sem sentido. Prova da inferência: Os lados de um quadrado são iguais e, segundo ele, são compostos de pontos, por isso há um número igual de pontos nos lados opostos do quadrado. Sugiro, portanto, que se tracem linhas dos pontos individuais de um lado para o lado oposto, para os pontos individuais opostos, sejam os pontos finitos ou infinitos em número. Estas linhas serão equidistantes umas relativamente às outras, e entre linhas relacionadas assim não será possível interpor uma linha ou ponto. Porque as linhas traçadas procedem de iguais distâncias de pontos imediatos um ao outro num lado para pontos imediatamente opostos a eles no outro lado. Portanto, dado que tais linhas cortam e interceptam a diagonal, elas interceptam a linha ou em todos os seus pontos ou em nenhum. Se em todos os pontos, então o número de pontos na diagonal é igual ao número de pontos nos lados, e consequentemente o lado e a diagonal são iguais. Mas se essas linhas que atravessam a diagonal não tocam todos os pontos da diagonal, então algum ponto da diagonal está entre alguma das linhas que procedem do lado ao lado. E então, pelo mesmo raciocínio, há um ponto na diagonal entre cada duas das linhas próximas uma à outra, dado que não existe mais nenhuma razão pela qual um ponto na diagonal devesse estar interposto entre essas linhas do que entre quaisquer duas outras. Portanto, algum ponto interpor-se-á ou entre quaisquer duas linhas próximas ou entre nenhumas duas linhas. Mas dado que essas linhas são equidistantes, segue-se que é tão provável que um ponto se interponha entre elas numa parte do que noutra; portanto, um ponto pode ser interposto na parte dessas linhas onde elas juntam o lado, o que está contra a hipótese, dado que tais alcançam todos os pontos do lado de acordo com o caso hipotético. Portanto, nenhum ponto pode ser interposto entre duas linhas traçadas de dois pontos imediatos um ao outro ou imediatamente relacionados entre si num lado[129].

---

mediat oblique aliquod punctum dyametri et mediant forte plura. Sed propter 8^{am} illud stare non potest».

[129] Adão Wodeham, *Tractatus de indivisibilibus*, op. cit., Quaestio 1, Articulus 1, 77, pp. 82--84: «si linea componeretur ex punctis, diameter quadrati esset aequalis costae, quod falsum est et contra sensum. Probatio consequentiae: Costae quadrati sunt aequales et, per te, componuntur ex punctis, ergo sunt aequalia puncta in lateribus oppositis quadrati. Volo ergo quod a singulis punctis costae unius, sive sint finita sive infinita, «protrahantur lineae ad costam sibi oppositam ad singula puncta opposita. Istae lineae erunt sibi invicem aequedistantes, et non poterit inter eas sic se habentes intercipi nec linea nec punctus, quia procedunt aequedistanter a punctis immediatis» in una costa ad puncta sibi immediate opposita in alia costa. Illae ergo lineae cum transeant per diametrum et secent eam, aut secant eam in omnibus punctis eius, aut non. Si in omnibus, ergo puncta diametri sunt aequalia punctis costae, et per consequens costa et diameter sunt aequales.

Em suma, o que se passa é que, supondo-se a estrutura indivisibilista das linhas (a hipótese de que as coisas contínuas são compostas por indivisíveis *imediatos*), duas grandezas da mesma espécie (as linhas) mas de comprimentos desiguais são iguais (o lado de um quadrado e a sua diagonal).

Um outro argumento (sexto) apresentado por Wodeham é o seguinte:

> Se um contínuo é composto de indivisíveis, e uma entidade finita por um número finito daqueles, então nem toda a linha seria divisível em duas metades iguais. [Ora,] O oposto é mostrado pela 10ª proposição do livro I de Euclides. (...)[130].

A 10ª proposição do livro I de Euclides estabelece que é possível «Dividir em duas partes iguais uma recta finita dada.». Aquilo que fica em causa, para ser avaliado, é se esta proposição de Euclides – respeitante à bissecção de uma linha recta finita – já comporta a infinita divisibilidade de uma linha. Trata-se de uma questão perfeitamente legítima diante do dado objectivo que é a total ausência de uma referência à divisão até ao infinito, ao longo da solução do problema proposto pela Proposição 10. Trata-se então de saber se a propriedade da bissecção acarreta a defesa da infinita divisibilidade de uma linha, questão para a qual não se dá uma resposta unânime. Explicitamente, a dita proposição de Euclides apenas sustenta a divisibilidade de uma linha em duas partes iguais, mas nada do que é afirmado, ao longo do desenvolvimento da Proposição 10, aponta para que seja forçoso que tal processo de divisão se possa realizar até ao infinito. Ainda assim, a questão pode ser examinada com maior profundidade. Afinal, a afirmação da possibilidade de se poder bissectar uma qualquer linha recta finita determina que se encontre um ponto-médio

---

Si autem illae lineae quae transeunt per diametrum non tangunt omnia puncta diametri, ergo aliquis punctus diametri est inter lineas aliquas procedentes a costa ad costam, et tunc eadem ratione [est punctus in diametro] inter quaslibet alias duas proximas, cum non sit maior ratio quare inter has lineas interponatur punctus plus quam inter alias duas in diametro. Et ideo vel inter quaslibet duas proximas intercipietur punctus aliquis vel inter nullas duas. Sed cum illae lineae sint aequedistantes, sequitur quod quantum intercipitur inter illas ex una parte tantum intercipietur inter eas ex alia parte; ex illa ergo parte illarum linearum qua coniunguntur costae potest punctus intercipi, quod est contra positum, quia illae lineae per casum capiunt omnia puncta costae. Ergo nullus punctus potest intercipi inter duas lineas protractas a duobus punctis immediatis vel immediate se habentibus in una costa». Este argumento não é novo: Escoto elucidou-o em *Opus oxoniense*, livro II, dist. 2, quest. 9.

[130] Adão Wodeham, *Tractatus de indivisibilibus*, op. cit., Quaestio 1, Articulus 1, 72, p. 78: «si continuum componitur ex indivisibilibus, et finitum ex finitis, tunc non quaelibet linea esset divisibilis in duas medietates aequales, cuius oppositum est demonstratum in 10ª [propositione] primi Euclidis. (...)».

nesta linha e que dela seja destacada então a sua metade, parte que pode ser sujeita também a igual actividade matemática, isto é, ser também ela cortada ao meio, e a grandeza que daí surja ser de novo bissectada, num processo sem fim. Logo, na proposição da bissecção de Euclides pode, de facto, ser reconhecida a exigência da infinita divisibilidade de toda e qualquer linha finita, porque ainda que da prática continuada da bisecção resulte uma parte cada vez mais pequena daquela que tinha sido a linha originária de uma determinada extensão, aplicando-se o primeiro postulado euclídeo («traçar uma linha recta desde um ponto qualquer até um ponto qualquer»), estaríamos diante de um segmento a bissectar. Por meio do processo de bissecção, o que se verifica é que uma linha é passível de uma infinita divisibilidade potencial, pois pode-se sempre avançar continuamente com aquele processo matemático e este não cessará num determinado número de operações[131]. Em suma: uma linha recta finita, seja de que extensão for, pode ser dividida infinitamente em partes (isto é, em segmentos de recta), pode-se sempre tirar uma parte fora ao que já foi tirado, sem que nunca se alcance um mínimo a partir do qual já não se possa avançar na divisão (ou seja, um indivisível).

No entanto, a ideia da infinita divisibilidade de uma linha geométrica, ao abrigo de um processo de bissecção sem fim, está longe de ser pacífica. Da defesa da tese da composição das linhas por um número finito de pontos (número este que seria, obviamente, ou par ou ímpar), resultam aporias – como alguns autores reclamam. As dificuldades que tal tese levanta podem ser observadas se encararmos o problema tendo em mira quatro grupos de possibilidades acerca de uma linha recta finita que seria: (1) composta por um número ímpar de indivisíveis extensos, (2) composta por um número par de indivisíveis extensos, (3) composta por um número par de indivisíveis inextensos, (4) composta por um número ímpar de indivisíveis inextensos[132].

[131] Aristóteles defendera a infinita divisibilidade, em termos potenciais, de uma grandeza, referindo-se à «possibilidade de uma série indefinida de subdivisões da extensão» (*Física*, III, 7, 207b4-5). Dada «a possibilidade da divisão sem limite» (*ibidem*, III, 7, 207b7), uma linha geométrica tem um número infinito de pontos potenciais de divisão. Uma ampliação da ideia aristotélica é declarar ainda a divisão em partes proporcionais, isto é: através de um processo de bissecção sem fim, uma linha geométrica pode ser sempre dividida em metades elas mesmas divisíveis noutras partes-metades infinitamente divisíveis. Ou seja, entre quaisquer dois pontos que assinalam os extremos de uma linha existe potencialmente um ponto médio que se actualiza no momento da divisão. Da operação de divisão de uma grandeza sem cessar resulta evidente que o meio está sempre latente (ou, a metade de alguma coisa pode ser sempre encontrada e esta pode ser dividida indefinidamente).

[132] Tal como consta *in* J. Murdoch, *Geometry and the Continuum in the Fourteenth Century: A Philosophical Analysis of Thomas Bradwardine's Tractatus de Continuo*, op. cit., pp. 142-143.

Observemos, então, as consequências que decorrem da conjugação destes critérios à luz da aplicação da bissecção.

Iniciemos esta tarefa elucidativa no contexto dos indivisíveis extensos. Assim, (1) se uma linha é constituída por um número ímpar de indivisíveis, então ela oferece um indivisível a meio da grandeza onde supostamente se poderia proceder à bissecção, mas tal operação é impraticável dado que esta entidade seria corpórea, isto é, apresentaria uma determinada extensão e esta teria de «sofrer» um fenómeno de «desagregação» de partes (pelo corte), mas um indivisível é exactamente o que não pode ser dividido. Ao passo que (2) se uma linha é composta por um número par de indivisíveis, então nela não se observa um indivisível que pudesse indicar o meio. Ainda assim, seria possível destacar duas grandezas (segmentos da recta) apresentando as mesmas medidas, como sendo, cada uma delas, a metade da primeira linha dada. Teríamos então aí o segmento derivado da bissecção, como se pretendia. Esse mesmo segmento, menor do que a linha original, haveria de conter também um determinado número de indivisíveis e quando, por um processo de bissecção contínua, nos detivéssemos perante um número ímpar dos mesmos, teríamos aí o indivisível que constituiria o centro da operação do corte mas este não pode ser dividido (como já foi referido anteriormente).

Debrucemo-nos agora sobre a questão aplicada a indivisíveis inextensos, e reconheçamos que (1) se uma linha é constituída por um número par de indivisíveis, então ela não permite nem um só acto de bissecção, pois não nos é dada, numa posição central, qualquer entidade susceptível de corte. Agora, se (2) uma linha é constituída por um número ímpar de indivisíveis, então ela já apresenta uma entidade ao centro que permite a operação da bissecção sem levantar qualquer dificuldade (aquele indivisível seria o ponto terminal de um segmento e, ao mesmo tempo, o ponto inicial do outro segmento), mas acabaríamos por esbarrar na impossibilidade de se realizar esta operação *ad infinitum*, pois, como já foi explicado anteriormente, chegar-se-ia a um segmento derivado da linha original que seria composto por um número par de indivisíveis.

A tese da infinita divisibilidade da linha geométrica por meio da bissecção é compatível com a da composição dos contínuos por um número infinito de indivisíveis, sejam estes mediatos ou imediatos. Senão vejamos: se uma linha é composta por indivisíveis mediatos, isso significa que entre quaisquer dois indivisíveis existe sempre um outro, logo, os indivisíveis não deixam de «aparecer» para a dita operação e em número infinito; se a linha é composta por um número infinito de indivisíveis imediatos ou em contacto, então, aplicando a bissecção continuamente não chegaríamos a um segmento com um número finito de indivisíveis, já que toda a grandeza seria composta por um número infinito deles, logo, teríamos sempre um número de indivisíveis que possibilitaria que a operação não findasse. A tese da infinita divisibilidade de um contínuo é compatível com a tese de que uma grandeza é composta por um número infinito de indivisíveis. Pois se um contínuo é infinitamente divisível, em potência, tal ideia indica-nos que como resultado da divisão destacam-se continuamente entidades (em número infinito, portanto), que podem ser ainda divisíveis (como defendeu Aristóteles) ou já não mais (posição atomística). Mas, acautelemos, o facto de se reconhecer a compatibilidade entre as duas teses (infinita divisibilidade de uma grandeza e composição indivisibilista dos contínuos) não implica que uma leve necessariamente à depreensão da outra, pois, como já foi referido, teoricamente nada impede que da divisão da grandeza possam surgir entidades igualmente divisíveis.

Estes e muitos outros argumentos de Bradwardine e de Wodeham são ilustrativos das polémicas discussões em torno da possibilidade de uma estrutura atomística dos contínuos matemáticos e físicos. Embora o exame se faça no território da geometria, é importante referir que por meio de uma só demonstração infere-se conclusões válidas em três domínios: (1) o que é verdadeiro de um caso particular, (2) o que é verdadeiro de um qualquer outro caso da mesma classe, (3) o que é verdadeiro no domínio da física. Ou seja, os resultados obtidos por meio de x-procedimento metódico podem ser generalizados a este ponto: a física constitui o último patamar da tendência generalizante da demonstração. Os autores escolásticos, apoiando-se na filosofia aristotélica, acreditavam que o que é dito acerca do contínuo matemático é igualmente verdadeiro para o contínuo físico (o que é explicável pelo entendimento da matemática enquanto *scientia realis*). Para Aristóteles, os entes matemáticos são «modos de ser estruturais das coisas sensíveis»[133]. Tomando a via aristotélica, como os objectos da geometria têm uma existência potencial na natureza, ainda que a demonstração se faça no âmbito dos contínuos geométricos, os resultados obtidos valem ainda para os contínuos físicos.

Não concluamos, todavia, que o objectivo que os atomistas medievais tinham em vista, com as suas teorias, era o de estabelecer leis físicas para os fenómenos naturais. Com efeito, nada se encontra, nos seus escritos, que possa acusar essa intenção (o atomismo do século XVII é que será um

---

[133] G. Reale, *Guía de lectura de la «Metafísica» de Aristóteles*, Herder, Barcelona 1999, p. 185.

atomismo físico)[134]. O que se passa é que estes filósofos embrenham-se, de facto, na discussão de questões físicas (como a mudança qualitativa, por exemplo), mas fazem-no porque necessitam de encontrar as variáveis para a abordagem matemática de um problema mais geral (tal como a análise abstracta que Aristóteles realizara acerca da continuidade das grandezas) e assim acabam por apresentar novas concepções acerca do contínuo, numa inevitável ofensiva contra a doutrina anti-indivisibilista. E para tal servem-se da matemática porque o átomo de que falam não tinha extensão, sendo idealizado como um ponto matemático. Assim, no contexto da disputa filosófica acerca do atomismo no século XIV, a análise do número de átomos de dois objectos físicos desiguais pode realizar-se pela acção de comparação do número de pontos em duas linhas geométricas desiguais.

[134] «The Oxford indivisibilists do not seem to have been anxious to promote physical atomism», J. North, «Astronomy and Mathematics», op. cit., p. 149.