Boole e Frege:
matematização da lógica *vs.* logificação

João Alberto Pinto[1]

Resumo: Este artigo contrasta, de um ponto de vista histórico, os modos de pensar a formalização da lógica que estão presentes em G. Boole e G. Frege - e que remetem, respectivamente, para a ideia de matematização da lógica e para a ideia de logificação (da matemática). As diferentes perspectivas destes dois autores têm profundas repercussões no modo contemporâneo de reflectir sobre a natureza formal da lógica. Conclui-se apontando a diferença de posições em que um booleano e um fregeano se encontram relativamente à noção de validade, bem como a dificuldade - para um fregeano - de formular a questão filosófica sobre a prioridade de uma noção semântica ou de uma noção sintáctica de validade tal como estas noções se apresentam no âmbito da metalógica.

Abstract: This article contrasts, from a historical point of view, the attempts at the formalization of logic that can be found in G. Boole and G. Frege, and which are associated respectively with the idea of a mathematization of logic and with the idea of a logification (of mathematics). The different approaches of these two authors have profound repercussions in how the formal nature of logic is conceived today. The article concludes by pointing out the different positions in which a boolean and a fregean find themselves in when considering the notion of validity and also the difficulty - for a fregean - of formulating the philosophical question about the priority of a semantic or syntactic notion of validity as these notions present themselves from a metalogical point of view.

[1] Membro e investigadora do *Mind Language and Action Group* – MLAG – do Instituto de Filosofia da Universidade do Porto e Professor do Departamento de Filosofia da Faculdade de Letras da Universidade do Porto

1

Em meados do século XIX, George Boole teve a ideia de levar a cabo a matematização da lógica – ou da racionalidade tal como ela era *então* encarada na área a que se chama, ainda hoje e no seguimento de Aristóteles, Lógica. A ideia conduziu Boole a escrever essencialmente dois livros. O primeiro, de 1847, tem por título *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning* [MAL]; o segundo, publicado em 1854, *An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* [LT]. Nos dois casos, a concretização da ideia de matematização da lógica assume uma forma algébrica – de acordo com a qual Boole falou, desde logo, de *uma* álgebra da lógica (LT, pp. 37-38) e, depois, passou a falar-se também de álgebra(s) booleana(s) ou, mais geralmente e hoje em dia, de uma lógica algébrica. Esta concretização da ideia contrasta – parcialmente – com as tentativas de matematização da lógica que assumiam uma forma geométrica em Gottfried Leibniz, Leonhard Euler e Joseph D. Gergonne mas que culminaram, por confluência com o trabalho desenvolvido por Boole, em John Venn e de modo muito mais rico nas investigações lógicas de Charles S. Peirce.

A própria ideia de uma matematização da lógica, porém, contrasta – radicalmente – com a ideia de logificação da matemática que está presente em Gottlob Frege. O primeiro livro de Frege foi publicado em 1879 com o título *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildet Formelsprache das reinen Denkens* [BS], i. e. "notação (ou escrita) conceptual (ou, ainda, ideografia) – uma linguagem formal (ou, mais literalmente, uma linguagem de fórmulas) para o pensamento puro construída como a (ou à imagem da) aritmética (ou, de modo muito mais revelador, segundo o modelo proporcionado pela (linguagem da aritmética)". A tentativa de concretização da ideia de Frege assenta na invenção de *uma nova lógica* – ou numa quase completa renovação da anterior imagem da racionalidade pela articulação desta última com um avanço decisivo na própria Lógica (BS, p. 7). Sob clara inspiração leibniziana (BS, pp. 6-7), Frege propôs-se assim criar uma lógica capaz de aparecer simultaneamente como uma (língua) *characteristica universalis* e como um *calculus ratiocinator* que abrangesse aqueles fenómenos tratados no âmbito da lógica anterior, mas também capaz de revelar (ou, simplesmente, de tornar imaginável) o carácter lógico dos conceitos da matemática pura – tal como sejam, por exemplo e em primeira instância, os conceitos aritméticos de ordem numa série e de número. Sem pensar nas vicissitudes que atingiram este último aspecto – o aspecto conceptual e propriamente logicista – das posições de Frege, parece razoável considerar que a distinção rígida entre a justificação e a descoberta de uma verdade (BS, p. 5) é solidária em Frege da ideia de uma logificação generalizada do saber (BS, p. 7): «...we can with the greatest expectation of success proceed to fill the gaps in the existing formula languages, connect their hitherto separated fields into a single domain, and extend this domain to include fields that up to now have lacked such a language.» Deste ponto de vista, não é de admirar muito que Frege (BS, p. 7) se revelasse confiante no facto de que a sua ideografia podia ser «...successfully used wherever special value must be placed on the validity of proofs» – em *qualquer* lugar ou contexto, quer se tratasse de lugares ou contextos matemáticos, quer se tratasse de lugares ou contextos não matemáticos. Também se compreende bem que Frege tivesse que pensar sempre na sua lógica como universal – no sentido em que essa lógica devia servir para esclarecer *o que é uma prova quaisquer que fossem os objectos aí em causa*. De acordo com isto, a lógica apresentada por Frege no BS não possui então, para além de três funções (propriamente) lógicas que correspondem à negação, à condicionalização e à quantificação universal, senão variáveis. Estas variáveis podem ser variáveis proposicionais, notacionalmente assimiladas por Frege a nomes (de objectos) arbitrários, variáveis funcionais (para conceitos arbitrários) autorizando uma quantificação pelo menos de segunda ordem ou, claro, variáveis individuais para absolutamente *todos os objectos* – ou para um objecto qualquer da totalidade de objectos que há – e não para objectos deste ou daquele tipo específico.

O modo de pensar de Frege contrasta com a ideia avançada por Boole (LT, p. 42) no momento em que retomava a noção de universo *do discurso* já antes usada por Augustus De Morgan: «In every discourse, whether of the mind conversing with its own thoughts, or of the individual in his intercourse with others, there is an assumed or expressed limit within which the subjects of its operation are confined. The most unfettered discourse is that in which the words we use are understood in the widest possible application, and for them the limits of discourse are co-extensive with those of the universe itself. But more usually we confine ourselves to a less spacious field.» Pode certamente pensar-se que assim como a universalidade (fregeana) – presente, antes de mais, em "para todo o x ..." – faz (pelo menos) sentido para Boole, também acaba por ser relativamente fácil proporcionar um sentido para a noção (booleana) de universo do discurso no âmbito da lógica de Frege – por meio de “para todo o x, se x está em *u*, então ...”. Porém, o ponto é aqui apenas o de que Frege julgou completamente dispensável o modo – relativizado, dir-se-ia – de pensar sobre a racionalidade que a afirmação de Boole exemplifica e que, aliás, Frege também reprovou na concretização de alguns pontos do programa da metamatemática que David Hilbert tentava levar a cabo. De facto, este ponto não é mais que uma das várias maneiras de compreender por que razão Frege pôde afirmar que a sua lógica – ao contrário da lógica de Boole e de Erwin Schröder, um dos seguidores directos de Boole – não era apenas (ou não era meramente) um *calculus ratiocinator*.

Pode também pensar-se que Frege tinha o objectivo de fornecer uma análise da noção de prova – independentemente da universalidade da lógica específica com base na qual essa análise se desenvolveria ou, de um modo similar, independentemente da adequação (ou desadequação) da imagem da racionalidade que a universalidade (ou a falta de universalidade) na própria Lógica poderia então impôr. No que respeita a esse ponto, acontece que os desenvolvimentos posteriores revelaram o quanto Frege estava *próximo* da verdade ao manifestar a confiança que efectivamente manifestou nos poderes da sua lógica – ou, mais exactamente, nos poderes daquela parte da sua lógica que é hoje conhecida como Lógica de Primeira Ordem com Identidade. Ainda assim, parece razoável pensar que uma tal aproximação à verdade prolonga algumas ideias que já estavam presentes em Boole – e pensar, além disso, que uma das mais salientes consequências dessa aproximação à verdade se encontra ligada a uma espécie de falhanço nos propósitos mais estritamente leibnizianos de Frege. Por um lado, parece dever-se a Boole a distinção entre uma perspectiva sintáctica e uma perspectiva semântica do funcionamento das linguagens lógicas (pelo menos) – muito similar à distinção entre essas duas perspectivas que é absolutamente essencial quando se pensa na actual metalógica. Por outro lado, pode-se considerar que qualquer análise da noção de prova – assim como a discussão da relevância de uma qualquer prova que, por exemplo, recorra à Lógica de Primeira Ordem com Identidade – acaba por envolver alguns resultados provenientes da metalógica, mas que são estranhos a uma lógica concebida simultaneamente como uma (língua) *characteristica universalis* e um *calculus ratiocinator*. Deste ponto de vista, o uso de muitos processos cuja natureza deve ser encarada como matemática – no âmbito da metalógica desenvolvida desde a terceira década do século XX – constitui uma espécie de recuperação (pelo menos) histórica da ideia de matematização da lógica.

2

Em Boole, a ideia de matematização da lógica tem por base – explicitamente e desde o primeiro parágrafo de MAL – a atribuição de uma importância fundamental a determinado princípio cuja origem remonta a dois matemáticos contemporâneos de Boole: Gregory Peacock (o criador da chamada Álgebra Simbólica) e Duncan F. Gregory (que alargou algumas ideias de Peacock ao âmbito da Análise). Na formulação adoptada por Boole (MAL, p. 3), o princípio combina dois aspectos dos processos matemáticos – ou, de modo mais exacto e atendendo ao trabalho desenvolvido por Peacock e Gregory, respectivamente de uma parte importante dos processos algébricos e dos processos analíticos. De acordo com o primeiro aspecto, os processos aí em causa são processos simbólicos – no sentido em que a natureza (ou, como diz Boole, a validade) de tais processos depende das leis que regulam o uso dos símbolos (ditas, por Boole, leis de combinação) e não da interpretação desses símbolos; o segundo aspecto do princípio, por sua vez, consagra a possibilidade de haver várias interpretações de tais processos simbólicos – todas elas igualmente admissíveis na condição de serem conservadas as leis (ou, nas palavras de Boole, a verdade das leis) que regulam os símbolos.

Atendendo ao facto de que os símbolos a que Boole se refere são para ser encarados, de acordo com o primeiro aspecto do princípio, como formas arbitrariamente fixadas – ignorando-se o sentido, em geral, que tais formas tenham – e dada a exigência de invariância incluída no segundo aspecto do princípio, este princípio pode ser dito *princípio de invariância da forma*. Além disso e recorrendo a uma terminologia que na época começava a ser usada no âmbito da linguística, pode-se ainda pensar de imediato que os dois aspectos do princípio suscitam – respectivamente – uma abordagem sintáctica e uma abordagem semântica das linguagens artificiais a que Boole chama simbólicas.[2] De qualquer modo, o problema de que Boole trata – após a

[2] Estas linguagens simbólicas têm um papel crucial na parte final da introdução a MAL quando está em causa a posição de Boole sobre três temas: o tema do progresso científico em geral e não apenas no âmbito da matemática ou – mais incipientemente do que na matemática (MAL, p. 11) – no âmbito da lógica tradicional; o tema dos poderes do intelecto humano, particularmente no que respeita à manutenção de um (relativo) optimismo sobre o seu uso teórico e prático (MAL, pp. 10, 14); o tema das relações entre a matemática, a lógica e a filosofia – de cuja discussão resulta a célebre associação da

formulação do próprio princípio de invariância da forma – é o da importância desse princípio. Para Boole (MAL, p. 3) há aí um problema pela simples razão de que «...the full recognition of the consequences of this important doctrine has been, in some measure, retarded by accidental circumstances.» Eis a especificação destas circunstâncias históricas (ou acidentais) tal como Boole (MAL, pp. 3-4) a efectua: «It has happened in every known form of analysis, that the elements to be determined have been conceived as measurable by comparison with some fixed standard. The predominant idea has been that of magnitude, or, more strictly, of numerical ratio. The expression of magnitude, or of operations upon magnitude, has been the express object for which the symbols of Analysis ["not less than the ostensive diagrams of ancient geometry" (p. 4)] have been invented, and for which their laws have been investigated.»

A passagem é relevante por duas razões principais. Em primeiro lugar, Boole parece reconhecer aí como pouco razoável a suposição de que na origem – histórica – de uma linguagem simbólica não se encontre uma qualquer interpretação específica dessa linguagem. Deste ponto de vista histórico, a ligação entre os dois aspectos do princípio de invariância da forma é evidentemente um facto assinalável. Note-se que, para Boole, o desenvolvimento (ou, mais literalmente, os avanços) – e já não apenas a origem – da matemática envolve a possibilidade de haver várias interpretações das linguagens simbólicas. Isto explica que os exemplos de Boole (MAL, p. 3), logo após a formulação do segundo aspecto do princípio de invariância da forma, assinalem a relação da álgebra com questões aritméticas (sobre propriedades dos números) ou com a análise (com problemas dinâmicos ou ópticos) e a geometria (por via, pelo menos, da geometria analítica). Em segundo lugar, a passagem é relevante por permitir a Boole articular a questão da importância – realmente fundamental, dir-se-ia – do princípio de invariância da forma com a crítica de uma certa concepção acerca da matemática. Escreve Boole (MAL, p. 4): «The consideration of that view which has already been stated, as embodying the true principle [o princípio de invariância da forma] of the Algebra of Symbols, would, however, lead us to infer that this conclusion ["the notion that Mathematics are essentially, as well as actually, the Science of Magnitude", numa formulação imediatamente anterior] is by no means necessary.»

A crítica de Boole (MAL, p. 4) começa por colocar na base da

---

lógica à matemática, mais do que à filosofia (MAL, pp. 10-13).

concepção estritamente numérica da matemática um determinado raciocínio – ou, de maneira muito mais precisa, um raciocínio de tipo indutivo: «If every existing interpretation is shewn to involve the idea of magnitude, it is only by induction that we can assert that no other interpretation is possible.» Isto explica, desde logo, o facto de Boole não considerar necessária uma tal concepção. O defeito maior do raciocínio é, no entanto, o de que ele recorre – para conceber a matemática como uma ciência estritamente numérica – apenas à experiência histórica. Numa primeira objecção directa a esta componente do raciocínio, Boole (MAL, p. 4) nota simplesmente o seguinte: «The history of pure Analysis is, it may be said, too recent to permit us to set limits to the extent of its application.»

Uma segunda e mais profunda objecção é a de que o raciocínio procede a uma sobrevalorização da ligação entre os dois aspectos do princípio de invariância da forma. A este propósito, Boole (MAL, p. 4) observa então que mesmo que a diversidade de interpretações numéricas seja encarada como uma condição histórica da origem e do desenvolvimento das linguagens simbólicas em matemática (nomeadamente na álgebra, na análise e na geometria), tais interpretações numéricas não correspondem a qualquer estado definitivo da matemática – nem se pode assumir que elas constituam uma autêntica condição de existência (uma condição universal, como diz Boole) da matemática. Regressando ao modo como inicialmente o problema foi colocado, a predominância e o sucesso das interpretações numéricas das linguagens simbólicas apenas conseguiu protelar o reconhecimento de todas as consequências do princípio de invariância da forma – impondo, ao mesmo tempo (MAL, p. 4), «...the notion that Mathematics are essentially, as actually, the science of magnitude.»

Neste preciso momento, a estratégia de Boole radicaliza-se – e acaba por revelar aquela que é talvez a maior novidade do seu pensamento. Boole está disposto a supôr (MAL, p. 4) que o anterior raciocínio indutivo é (provavelmente) legítimo – para, logo de seguida, reafirmar a suficiência teórica de uma certa definição a que o princípio de invariância da forma conduz. Trata-se da definição daquilo que é um cálculo – escrevendo, agora, Boole (MAL, p. 4) que o princípio de invariância da forma por si só assegura «...the definitive character of a true Calculus, that it is a method resting upon the employment of Symbols, whose laws of combination are known and general, and whose results admit of a consistent interpretation.» A novidade em causa é evidentemente a ideia de que diante de uma linguagem simbólica – ou, melhor, depois de efectuada a identificação do (verdadeiro) cálculo associado ao emprego (metódico) dos símbolos dessa linguagem – nada pode impedir a tentativa de desenvolver uma interpretação alternativa a qualquer uma das interpretações já existentes dessa mesma linguagem. Note-se que esta ideia concretiza uma determinada observação efectuada alguns anos antes por Peacock. De acordo com essa observação de Peacock, as questões de interpretação poderiam ser posteriores – e não preceder – as questões relativas aos símbolos eles próprios.

Segue-se a formulação do objectivo de Boole (MAL, p. 4): «It is upon this general principle [o princípio de invariância da forma], that I purpose to establish the Calculus of Logic, and that I claim for it a place among the acknowledged forms of Mathematical Analysis, regardless that in its object [“the human intellect”, um pouco adiante (MAL, 7) e isso ainda que o objecto imediato de exame possa também ser (um)a linguagem natural (LT, p. 24)] and in its instruments [métodos ou procedimentos] it must at present stand alone.» Um pouco após a publicação de MAL – em carta dirigida a Arthur Cayley – Boole (*George Boole–Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, pp. 191-192) retomou a distinção entre os dois aspectos do princípio de invariância da forma para salientar que ao pretender que certas operações da álgebra (elementar) vigoram no seu cálculo lógico, «...I mean of course the symbolical operations – those which depend upon laws of combination, not upon interpretation.» Numa outra passagem que integraria o seu terceiro livro de lógica (nunca terminado) e antes de realçar outra vez a independência – literalmente e até certo ponto – dos dois aspectos do princípio de invariância, Boole (*George Boole–Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, p. 148) escreve: «...generally if any system of symbols subject to formal laws express thought under conditions of interpretation ... the conditions of interpretation do not impose any necessary restriction upon the processes [métodos ou instrumentos] which the formal laws sanction.»

Assim e em primeiro lugar, tem-se que aquilo que Boole chama o seu cálculo lógico não pode ser pensado como uma linguagem simbólica criada mais ou menos a partir do nada – ou à parte da matemática. A concretização do objectivo de Boole apenas se deixa apreender a partir da possibilidade, suscitada pelo princípio de invariância da forma ele próprio, de haver uma nova interpretação para a álgebra – ou, mais precisamente, para uma parte (elementar) da álgebra. Por sua vez e dado que a álgebra é já encarada como uma linguagem simbólica, o cálculo lógico de Boole aparece aos seus próprios olhos como uma particular re-interpretação – historicamente, pelo menos, enquadrada por interpretações anteriores – de um cálculo (no sentido definido por Boole a partir, mais uma vez, do princípio de invariância da forma) cuja proveniência (pelo menos) é algébrica. Para além disso e em completo acordo com o ponto revelado pela expressão usada pelo próprio Boole em LT (pp. 37-38), os desenvolvimentos históricos posteriores tornaram habitual pensar que o cálculo lógico de Boole é (possui, agora, a natureza de) uma álgebra – a qual se diz booleana, por vezes, mas de maneira não muito rigorosa atentando no próprio cálculo usado por Boole. Eis uma caracterização parcial desse cálculo (tal como ele se apresenta em LT) por meio de onze leis – muitas vezes ditas leis do pensamento tanto em LT, como em MAL – ou axiomas:

(i)	$xy=yx$;
(ii)	$x+y=y+x$;
(iii)	$x(yz)=(xy)z$;
(iv)	$x+(y+z)=(x+y)+z$;
(v)	$x(y+z)=xy+xz$;
(vi)	$x(y-z)=xy-xz$;
(vii)	$1x=x$;
(viii)	$0x=0$;
(ix)	$x(1-x)=0$;
(x)	$x+(1-x)=1$;
(xi)	$xx=x$.

Note-se que (ix), (x) e (xi) não são leis de combinação no sentido anteriormente intencionado por Boole pois dependem da interpretação de 1 como (um) universo do discurso, 0 como nada (a classe vazia) e x como uma classe qualquer (que tem em $1-x$ a classe sua complementar). Além disso e se quiser pensar-se nos termos da actual álgebra booleana, o mais notório é, talvez e por um lado, a ausência de uma lei da dualidade similar a (xi) para + mas, também ou por outro lado, que disso não se segue que o cálculo de Boole seja incapaz de representar por exemplo a união e a diferença simétrica entre classes.

Em segundo lugar, acontece que o recurso ao princípio de invariância da forma não autoriza apenas a anterior re-interpretação – a qual procede, em termos gerais, do numérico (algébrico, analítico ou geométrico) para a Lógica. O princípio de invariância da forma é igualmente crucial para uma outra re-interpretação que ocorre já no âmbito da Lógica, mas que só é assinalada por Boole cerca de um ano depois da publicação de MAL no artigo "The Calculus of Logic". Sem considerar os pormenores desta última re-interpretação, o facto é que ela fica concretizada no momento em que os símbolos do cálculo de Boole primeiramente elaborado para as proposições categóricas (na terminologia de MAL e da tradição aristotélica; para as proposições primárias ou concretas, na terminologia de LT) deixam de referir-se a classes de objectos para se referirem aos valores de verdade verdadeiro e falso – de modo a ter-se então um único cálculo capaz de lidar também com proposições hipotéticas (na terminologia de MAL e da tradição que remonta aos estóicos; com proposições secundárias ou abstractas, na terminologia de LT). Escreve Boole em "The Calculus of Logic" (*Studies in Logic and Probability*, p. 140): «When we pass to the consideration of hypothetical propositions, the same laws and the same general axiom which ought perhaps also be regarded as a law [trata-se aqui de uma espécie de meta-axioma – "equivalent operations performed upon equivalent subjects produce equivalent results" (MAL, p. 18) – visto, por um lado, como justificando quer a aplicação (literalmente) da álgebra à lógica, quer o uso do símbolo = enquanto único símbolo relacional em Lógica, e, por outro lado, como uma espécie de princípio bem mais fundamental (para a Lógica) que o tradicional *dictum de omni et nullo*], continue to prevail: the only difference being that the subjects of thought are no longer classes of objects, but cases of truth or falsehood of propositions.» Em LT – no exacto momento em que inicia o tratamento das proposições secundárias ou abstractas – Boole (LT, p. 159) escreve o seguinte: «The investigation upon which we are entering will, in its general order and progress, resemble that which we have already conducted. The two inquiries differ as to the subjects of thought they recognise, not as to the formal and scientific laws which they reveal, or the methods or processes which are founded upon those laws.»[3]

[3] A ideia volta a ocorrer nos manuscritos destinados ao terceiro livro sobre lógica de Boole. Numa determinada passagem destes textos, Boole (*George Boole – Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, p. 153) escreve que alguns dos seus resultados «…relate to thought as occupied about *things* but there is also a theory or doctrine of thought as exercised upon propositions – just as in the common logic we have the distinction between the logic of categoricals and that of hypotheticals. In all *formal* respects however, these theories are the same. Only it is to be observed that the science of the forms of thought as exercised about propositions, the fundamental conceptions of truth and falsehood take the place of the fundamental conceptions of existence and non-

3

Cerca de cem anos depois da publicação de MAL, começava a tornar-se evidente a diferença entre a chegada à lógica matemática que Boole tinha concretizado em meados do século XIX e aquela outra específica forma de lógica matemática (ou logística, como então era comum dizer-se também) que surgiu apenas com o BS de Frege.

Ainda assim, uma análise da terminologia consolidada precisamente desde meados do século XX para falar de linguagens formais – em vez de linguagens simbólicas – permite realçar a novidade do pensamento de Boole. Escreve Alonzo Church (*Introduction to Mathematical Logic*, p. 48), de modo bastante similar ao usado por Boole para formular o primeiro aspecto do princípio de invariância da forma – aquele aspecto que assegura as características de um verdadeiro cálculo: «...we begin by setting up, in abstraction from all considerations of meaning, the purely formal part of the language [cujo estudo "...is called *syntax*" (p. 58)], so obtaining an uninterpreted calculus or ... system.» A seguir, Church (*Introduction to Mathematical Logic*, pp. 54, 55) complementa a anterior ideia e observa que, diante de um tal «...system ["the purely formal part of the language"] ..., we still do not have a formalized language until an *interpretation* is provided. ... (This lead us to the subject of *semantics*.)» Por fim e um pouco adiante, Church (*Introduction to Mathematical Logic*, p. 56) nota que a parte puramente formal (ou sintáctica) de uma linguagem formal pode ser desenvolvida (ou estudada) com uma ou mais interpretações específicas em vista – designada(s) então interpretação(ões) principal(is) – mas

---

existence in the science of thought as exercised by things.» A terminologia usada por Boole é completamente coerente e atendendo a esta última passagem, bem como à passagem de LT (p. 159) já citada, têm-se

> (1) leis formais que são as leis de combinação dos símbolos, às quais Boole (MAL, p. 3) se refere para formular o primeiro aspecto do princípio de invariância da forma,
>
> (2) leis científicas, agora reveladas no âmbito de um certo inquérito, teoria ou doutrina simbólica que – de acordo agora com o segundo aspecto do princípio de invariância da forma – está dependente de interpretação (*George Boole – Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, pp. 191-192) ou expressa pensamento sob condições de interpretação (*George Boole – Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, p. 148)

e

> (3) métodos ou procedimentos – ou instrumentos – fundados (LT, p. 159) sobre essas leis.

sempre «...retaining our freedom to employ any interpretation that may be found useful.»

A distinção básica, para este modo de pensar, é a distinção entre cálculos (ou sistemas formais, numa designação tomada aqui como sinónima de "cálculo") interpretados e cálculos (sistemas formais) não interpretados. Nos próprios termos de Church, um cálculo (sistema formal) é a parte puramente formal ou sintáctica de uma linguagem formal – cuja parte semântica, por sua vez, se deve à(s) interpretação(ões) fornecida(s) para esse cálculo (sistema formal). Note-se que este modo de pensar assegura uma generalidade para as noções de cálculo (sistema formal) e linguagem formal de acordo com a qual nem todos os cálculos (sistemas formais) e linguagens formais se têm de encarar – por definição – como caracteristicamente lógicos. De outro modo: a pretensão de que um cálculo (sistema formal) é uma lógica depende dele ter uma interpretação susceptível de conduzir à resolução de problemas colocados pela validade de certos raciocínios. Segue-se a descrição efectuada por Church (*Introduction to Mathematical Logic*, pp. 48-49) do desenvolvimento (ou estudo) de uma linguagem formal a partir de um cálculo (sistema formal).

Em primeiro lugar, tem de haver um conjunto (finito ou infinito, mas sempre enumerável) de símbolos primitivos – ao qual se chama vocabulário ou, numa designação que é neste ponto preferível, *alfabeto*: «The vocabulary [alfabeto] of the language is specified by listing the single symbols which are to be used. These are called the *primitive symbols*, and are to be regarded as indivisible in the double sense that (A) in setting up the language no use is made of any division of them into parts and (B) any finite linear [ou, melhor, apenas normalmente linear] sequence of primitive symbols can be regarded in only one way as such a sequence of primitive symbols.»

Em segundo lugar, tem de poder-se decidir – de acordo com um conjunto (finito) de regras de formação – que sequências (finitas) de símbolos primitivos são para encarar como fórmulas ou, dispensando agora qualquer abreviatura, como fórmulas bem formadas: «A finite [normalmente] linear sequence of primitive symbols is called a *formula*. And among the formulas, rules ["following [Rudolf] Carnap let us call them the *formation rules* of the system" (p. 50)] are given by which certain ones are designated as *well-formed formulas* (with the intention, roughly speaking, that only the well-formed formulas are to be regarded as being genuinely expressions of the language).»

Em terceiro lugar, pode ser especificado um certo conjunto (finito ou infinito, mas sempre enumerável) das anteriores fórmulas bem formadas – às quais se chama axiomas: «Then certain among the well-formed formulas are laid down as *axioms*.» As fórmulas bem formadas que são axiomas de um cálculo (sistema formal) podem encarar-se como simplesmente dadas (num qualquer sentido que permanece aqui indeterminado) ou como notáveis – num sentido que envolve a ligação entre tais fórmulas bem formadas e outras fórmulas bem formadas, às quais se dará então o nome de teoremas, desse mesmo cálculo (sistema formal) ou num outro sentido que envolve imediatamente a(s) interpretação(ões) principal(is) do cálculo (sistema formal). Retomando uma compreensão mais tradicional do termo "axioma" e atendendo ao sentido no qual estão envolvidas a(s) interpretação(ões) principal(is) do cálculo (sistema formal), também pode pensar-se em verdades (encaradas como) evidentes ou, atendendo de novo aos dois sentidos distinguidos, respectivamente em fórmulas bem formadas fundamentais e em verdades fundamentais. Note-se, agora e primeiro, a presença de axiomas em cálculos (sistemas formais) associados a teorias (matemáticas) cuja origem e desenvolvimento histórico dependeu precisamente de axiomas ou cuja reconstrução (num determinado momento histórico) se efectua de forma axiomática. Foi nesta direcção que se desenvolveu o trabalho inicial de Giuseppe Peano – contemporâneo do BS de Frege – mas, também e principalmente, de Hilbert. Nesta situação e tal como acontece no caso de Boole, a obtenção de (alguns, pelo menos) resultados *não tem de ser* concebida como caracteristicamente lógica. Note-se, a seguir, que os axiomas também ocorrem em cálculos (sistemas formais) na base de linguagens formais caracteristicamente lógicas, como seja a de Frege no BS onde os axiomas têm a designação de leis ou juízos do pensamento puro (BS, pp. 28-29) – mas que não é necessária a existência de axiomas para se falar de um cálculo (sistema formal), nem evidentemente para se falar numa linguagem formal caracteristicamente lógica. Basta pensar, a este último propósito, nos cálculos (sistemas formais) na base de linguagens formais caracteristicamente lógicas que dispensam axiomas e que são hoje dito(a)s de dedução natural – no seguimento do trabalho desenvolvido por Gerhard Gentzen a partir de 1934.[4]

[4] Richard I. G. Hughes ("On First-Order Logic", p. 276) explica a motivação do trabalho de Gentzen do seguinte modo: «...if one is not a logicist and nevertheless believes that one of the aims of formalizing logic is to make explicit the inner workings of mathematical reasoning, then it seems inappropriate to borrow the customary form of that reasoning to do so. Yet this is precisely what the axiomatic approach does; it presents

Em quarto e último lugar, tem de ser especificado um conjunto (finito) de regras que ligam entre si fórmulas bem formadas – mas não necessariamente todas as fórmulas bem formadas – de um cálculo (sistema formal). Estas regras permitem decidir, para uma dada fórmula bem formada, se ela pode ser produzida (ou derivada) a partir de um dado conjunto de fórmulas bem formadas – sendo que este conjunto é não vazio e que lhe podem pertencer um ou mais axiomas (se algum existir): «And finally (primitive) *rules of inference* (or *rules of procedure*) are laid down, rules according to which, from appropriate well-formed formulas as *premisses*, a well-formed formula is *immediately inferred* as *conclusion*.» A terminologia usada por Church pode voltar a suscitar a ideia de que apenas há cálculos (sistemas formais) caracteristicamente lógicos. Um modo de evitar esta ideia consiste em optar por falar de regras de produção (ou derivação) – em vez de regras de inferência. O próprio Church faz, primeiro, uma observação e, depois, uma nota que contribuem para afastar a ideia de que apenas há cálculos (sistemas formais) caracteristicamente lógicos. No âmbito da observação, Church escreve que quando se lida com um cálculo (sistema formal) – ou, mais literalmente e nesta passagem, com um sistema não interpretado – «...the terms *premiss*, *immediately infer*, *conclusion* have only such meaning as is conferred upon them by the rules ... themselves.» Depois, no âmbito da nota – a propósito do carácter imediato da produção (ou derivação) de uma fórmula bem formada a partir de uma ou mais fórmulas bem formadas – Church salienta que não se deve pensar em inferências imediatas no sentido da lógica tradicional, mas sim no facto de que é requerida uma e só uma aplicação de uma determinada regra do conjunto das regras de produção (ou derivação) do cálculo (sistema formal) para produzir (ou derivar) uma outra fórmula bem formada.

Atendendo a tudo isto, torna-se possível fixar mais dois pontos terminológicos. O primeiro ponto respeita aos teoremas – que são aquelas fórmulas bem formadas produzidas (ou derivadas) apenas a partir de um ou mais axiomas (se algum existir). O segundo ponto

logic in Euclidean clothing. To put this another way, if we are interested in the logic underlying Euclid's reasoning, then, instead of providing him with more axioms, we should look at the way he gets from one line to the next [na qual estará então um teorema, de acordo com a terminologia acima referida].» Depois, Hughes faz remontar esta perspectiva exactamente a Gentzen, «...who turned away from the axiomatic approach used by Frege, Russell, and Hilbert. "In contrast," he wrote … , "I intended to set up a formal system which came as close as possible to actual reasoning. The result was a *calculus of natural deduction*" (his emphasis).»

respeita à produção (ou derivação) de uma fórmula bem formada em geral. Neste caso fala-se, precisamente, de uma derivação e diz-se da(s) fórmula(s) bem formada(s) sucessivamente produzida(s) (ou derivada(s)) – pela aplicação de uma e só uma regra de produção (ou derivação) de cada vez – que essa(s) fórmula(s) bem formada(s) é (são) derivável(is).[5] Ora, nesta altura, pode ver-se que tanto o cálculo (sistema formal) de Boole, como o cálculo (sistema formal) de Frege permitem a obtenção de teoremas e a efectivação de derivações – mas que *apenas no caso de Frege* os teoremas e as derivações são integralmente e sempre concebidos como caracteristicamente lógicos.

O passo seguinte consiste em referir a existência de um outro modo de pensar em linguagens formais que é – pelo menos de acordo com Church – menos prático do que o modo de pensar atrás apresentado. Numa nota a uma passagem na qual admite o uso de "base primitiva" (de uma linguagem formal) para falar de um cálculo (sistema formal), Church (*Introduction to Mathematical Logic*, p. 50) começa por escrever: «An alternative, which might be thought to accord better with the everyday use of the word "language", would be to define a

[5] No que respeita à terminologia usada até este momento, Douglas R. Hofstadter (*Gödel, Escher, Bach–Laços Eternos*, pp. 38-39) observa, em primeiro lugar, a diferença existente entre um uso comum e o uso técnico de "teorema": «Tais sequências, produzidas pelas regras [de produção (ou derivação)] chamam-se *teoremas*. O termo «teorema» tem, evidentemente, um uso comum em matemática que difere bastante deste. Significa uma proposição em linguagem comum cuja veracidade é demonstrada por uma argumentação rigorosa, como o teorema de Zenão sobre a «inexistência» do movimento, ou o teorema de Euclides sobre a infinidade de números primos. Mas nos sistemas formais os teoremas não devem necessariamente ser concebidos como proposições – são simplesmente sequências de símbolos. E, ao invés de *demonstrados*, os teoremas são simplesmente *produzidos*, como se fosse por meio de máquinas, de acordo com certas regras tipográficas. Sendo assim, ... «teorema» terá, como é evidente, não só o significado quotidiano – um teorema é uma proposição em linguagem comum que alguém demonstrou –, como também o significado técnico – uma sequência que pode ser produzida nalgum sistema formal.» Em segundo lugar, Hofstadter (*Gödel, Escher, Bach–Laços Eternos*, p. 39) nota que o mesmo acontece com "axioma", «...cujo significado técnico também difere bastante do significado usual». Note-se que este significado técnico pode permitir contrastar os axiomas com os teoremas pelo facto de os axiomas serem fundamentais num cálculo (sistema formal) no sentido técnico de não poderem ser derivados nesse cálculo (sistema formal) de qualquer outra fórmula bem formada. Nesta situação, diz-se então que os axiomas – ou o conjunto dos axiomas – são independentes, tornando-se aceitável a ideia de que os axiomas são fórmulas bem formadas fundamentais (no sentido especificado que dispensa o apelo à evidência, tal como também a referência a qualquer interpretação do cálculo (sistema formal)). Em terceiro lugar, Hofstadter (*Gödel, Escher, Bach–Laços Eternos*, p. 39) observa ainda que «...a derivação [no âmbito de um cálculo (sistema formal)] é um primo austero da demonstração».

"language" as consisting of primitive symbols and a definition of well-formed formula, together with an *interpretation* ... and to take the axioms [se algum existir] and rules of inference as constituing a "logic" for the language [ou, de outro modo, como constituindo a componente dedutiva ou o aparato dedutivo (para a linguagem formal em causa)].» Um pouco depois, surge a posição do próprio Church (*Introduction to Mathematical Logic*, p. 50) sobre este modo de pensar: «But we reject it here, partly because of reluctance to change a terminology already fairly well established, partly because the alternative terminology leads to a twofold division in each of the subjects of syntax and semantics ... – according as they treat of the object language alone or of the object language together with a logic for it – which ... seems unnatural, and of little use so far as can now be seen.»

Em primeiro lugar e no seguimento destas observações de Church, pode-se ver o que é uma interpretação – para qualquer um dos dois modos de pensar. Uma interpretação é uma atribuição de referência ou de significado a símbolos primitivos de um cálculo (sistema formal) ou de uma linguagem formal – consagrando nesta última alternativa, respectivamente, os modos de pensar preferido e dispensado por Church. Nos termos em que Boole formulou o princípio de invariância da forma (MAL, p. 3) e falou da natureza de um verdadeiro cálculo (MAL, p. 4), importa é que uma (ou várias) interpretação(ões) seja(m) consistente(s) em dois sentidos: no sentido em que a(s) interpretação(ões) conserva(m) – invariantes – certas regras (ou leis, na terminologia de Boole) de combinação dos símbolos; no sentido – adicional ao anterior – em que, se isso ocorrer com várias interpretações, então todas estas interpretações são igualmente admissíveis. De acordo com o princípio de invariância da forma, aquilo que Boole chamou um verdadeiro cálculo é, por um lado, sintacticamente isolável – podendo ser encarado como uma combinação sob determinadas regras (ou leis, como diz Boole) dos símbolos primitivos de um cálculo (sistema formal) ou de uma linguagem formal – e, por outro lado, atendendo agora ao que Boole (*George Boole – Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, p. 148) chamou condições de interpretação, semanticamente interpretável de um modo capaz de assegurar uma referência ou um significado não só para os símbolos primitivos, como para os resultados da aplicação das regras (ou da conservação da verdade das leis, na terminologia de Boole) a que estão sujeitos esses símbolos primitivos.

Em segundo lugar, deve-se notar que a diferença entre os dois modos de pensar desaparece – ou desaparece exactamente *na prática* – quando se trata de linguagens formais que já são encaradas como caracteristicamente lógicas.[6] O uso dos termos "regras de inferência" ou "regras de produção (ou derivação)", por exemplo, revela-se indiferente – dado estar em causa uma interpretação (de símbolos primitivos) de acordo com a qual uma linguagem formal está apta a lidar com problemas suscitados pela validade de certos raciocínios. De acordo com o primeiro modo de pensar, a linguagem formal *é* uma lógica porque uma interpretação dos símbolos primitivos de um cálculo (sistema formal) – juntamente com os axiomas (se algum existir) e as regras de produção (ou derivação) desse cálculo (sistema formal) – permite resolver problemas suscitados pela validade de certos raciocínios. De acordo com o segundo modo de pensar, algumas linguagens formais *têm* a lógica que é determinada pelos axiomas (se algum existir) e pelas regras de inferência de uma *outra* linguagem formal[7] cujos símbolos primitivos também se encontram, tal como antes, interpretados de modo a lidar com problemas suscitados pela validade de certos raciocínios. O ponto é o de que apenas esta outra linguagem formal – a única que tem então cabimento pensar como caracteristicamente lógica ou, ainda, a única linguagem formal que seria verdadeiramente uma lógica – pode ter sido elaborada à parte daquelas linguagens formais das quais se diz *terem* (mas não propriamente *serem*) uma lógica. Ora, a própria ideia de que uma lógica se podia elaborar à parte da matemática – e apenas de acordo com uma imagem ou um modelo tal como o proporcionado por uma parte da matemática ou pela aritmética – é exactamente aquilo que separa o modo de pensar de Boole do modo de pensar que terá sido concretizado por Frege.

4

Embora se possa pensar num uso irrestrito do termo "validade" para qualquer linguagem formal, o mais interessante é ver o que sucede

---

[6] Por vezes e no âmbito do segundo modo de pensar, usam-se os termos "sistema formal" e "cálculo (lógico)" apenas para aquilo que, no seguimento da nota acima citada de Church, é a lógica – ou, ainda e de novo, a componente dedutiva ou o aparato dedutivo – de uma linguagem formal.

[7] Mesmo que se prefiram usar os termos "sistema formal" e "cálculo (lógico)" para esta outra linguagem formal. Nesta situação, torna-se evidente que há apenas cálculos (sistemas formais) lógicos – embora não seja ainda possível dizer, tal e qual como acontece no primeiro modo de pensar, que todas as linguagens formais são caracteristicamente lógicas ou, ainda, que todas as linguagens formais têm uma lógica (um componente dedutivo ou um aparato dedutivo).

quando essa linguagem formal é caracteristicamente lógica. Nesta situação, existe a possibilidade de considerar dois conceitos de validade: um deles é sintáctico e o outro é semântico – isto sem tomar posição sobre a eventual prioridade de um ou de outro dos dois conceitos. Seja uma linguagem formal L – ou uma particular lógica L – cujas fórmulas bem formadas F_1 , ... , F_{n-1} , F_n ($n \geq 1$) representam as premissas (F_1 , ... , F_{n-1}, com $n \geq 1$) e a conclusão (F_n) de um argumento.

Para explicar o conceito sintáctico de validade, tem-se

> (1) F_1 , ... , F_{n-1} , F_n é válido em L se e só se F_n é derivável de F_1 , ... , F_{n-1} e dos axiomas de L (se algum existir) de acordo com uma aplicação sequencial das regras de inferência de L – podendo dizer-se, neste caso, que há uma prova (em L) de F_n e escrever-se
>
> $F_1 , \ldots , F_{n-1} \vdash_L F_n$
> (F_n é uma consequência lógica sintáctica, em L, de F_1 , ... , F_{n-1}).

No caso em que n=1, tem-se

> (1.1) F é válida em L – ou é um teorema de L – se e só se F é derivável dos axiomas de L (se algum existir) de acordo com uma aplicação sequencial das regras de inferência de L – escrevendo-se, neste caso,
>
> $\vdash_L F$
> (F é um teorema de L).[8]

Para explicar o conceito semântico de validade, tem-se

> (2) F_1 , ... , F_{n-1} , F_n é válido em L se e só se F_n é verdadeira em todas as interpretações em que F_1 , ... , F_{n-1} são verdadeiras – escrevendo-se, neste caso,

[8] Note-se que pode ainda ser estabelecido – pelo menos por comodidade de escrita – que os axiomas de L (se algum existir) contam como teoremas de L.

$F_1 , \dots , F_{n-1} \vDash_L F_n$
(F_n é uma consequência lógica semântica, em L, de $F_1 , \dots , F_{n-1}$).

No caso em que n=1, tem-se

(2.1) F é válida em L – ou é uma verdade lógica de L – se e só se F é verdadeira em todas as interpretações de L – escrevendo-se, neste caso,

$\vDash_L F$
(F é uma verdade lógica de L).[9]

A ordem da explicação anterior pode ser invertida. Neste caso, os conceitos sintáctico e semântico de validade (para um argumento com premissas F_1 , ... , F_{n-1} e conclusão F_n) são explicados a partir da condicionalização

(1*) $(F_1 \square \dots \square F_{n-1}) \square F_n$

e conforme esta condicionalização seja, respectivamente,

(1*.1) um teorema de L, $\vdash_L (F_1 \square \dots \square F_{n-1}) \square F_n$,

ou

(1*.2) uma verdade lógica de L, $\vDash_L (F_1 \square \dots \square F_{n-1}) \square F_n$.

Qualquer que seja a ordem de explicação, a teoria da prova e a teoria dos modelos são as áreas no âmbito das quais actualmente ocorrem, respectivamente, a concepção sintáctica e a concepção semântica de validade – sendo que uma prova é uma derivação no sentido (sintáctico) atrás introduzido, mas que um *modelo* de uma ou mais fórmulas bem formadas de uma linguagem formal L é uma interpretação de L na qual essas fórmulas bem formadas são verdadeiras. Certamente que esta noção de interpretação – cuja

[9] Note-se que pode pretender-se que cada axioma de L (se algum existir) é uma verdade lógica – e que, nesse caso, todos os teoremas de L serão também pensados (ou pelo menos pensados, por oposição a deriváveis) como verdades lógicas.

articulação completa se deve essencialmente a Alfred Tarski – é bem mais específica do que aquela que Boole usou, mas ela remete ainda assim e muito claramente para a noção de universo de discurso que Boole integrou na Lógica. Além disso, a teoria da prova e a teoria dos modelos têm de encarar-se precisamente como as duas partes fundamentais da metalógica. Nesta perspectiva, a questão da prioridade de um ou de outro dos dois conceitos de validade – ou, até mesmo, a defesa da ideia de que a noção de consequência lógica é, em si mesma, apenas semântica ou apenas sintáctica – é uma questão filosófica (ou da filosofia da lógica) e não uma questão metalógica (ou da metalógica). O ponto é o de que esta(s) questão(ões) não podiam ser formuladas pelo próprio Frege. A sua formulação estava-lhe vedada quer pela ideia de auto-suficiência universal da sua lógica, inspirada pela ideia leibniziana de haver uma (língua) *characteristica universalis* que fosse simultaneamente um *calculus ratiocinator*, quer pela fixação de Frege na noção – precisamente e apenas – de prova.

Referências

Boole, George – *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay towards a Calculus of Deductive Reasoning* [MAL]. Cambridge: Macmillan, Barclay & Macmillan; London: G. Bell, 1847. Reimp. [Bristol]: Thoemmes, 1998.

Boole, George – *An Investigation of the Laws of Thought on which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* [LT]. Cambridge: Macmillan; London: Walton & Maberly, 1854. Reimp. [New York]: Dover, 1973.

Boole, George – *George Boole - Selected Manuscripts on Logic and its Philosophy*, Ed.: Ivor Grattan-Guiness; Gérard Bornet. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.

Boole, George – "The Calculus of Logic". *Studies in Logic and Probability*, Ed.: Rush Rhees. London: Watts, 1952, pp. 125-140.

Church, Alonzo – *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1956.

Frege, Gottlob – *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildet Formelsprache das reinen Denkens* / "*Begriffsschrift*, a Formula Language, Modelled Upon That of Arithmetic, for Pure Thought" [BS]. *From Frege to Gödel: A Souce Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Ed.: Jean van

Heijenoort. Trad. Jean van Heijenoort. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1967, pp. 5-82.

Hofstadter, Douglas R. – *Gödel, Escher, Bach: Laços Eternos*. Trad. José Viegas Filho, A. J. Franco de Oliveira; rev. e coord.: A. J. Franco de Oliveira. Lisboa: Gradiva, 2000.

Hughes, Richard I. G. – "On First-Order Logic". *A Philosophical Companion to First-Order Logic*, Ed.: R. I. G. Hughes. Indianapolis; Cambridge: Hackett, 1993, pp. 259-290.